

WT Tutorium 5

Andreas Tsouchlos

16. Januar 2026



Summen Unabhängiger Zufallsvariablen

$$Z = X + Y, \quad X, Y \text{ unabhängig}$$

$$\text{Faltungssatz (diskret): } P_Z(n) = \sum_{k=0}^n P_X(k) P_Y(n - k)$$

$$\text{Charakteristische Funktion: } \phi_Z(s) = \phi_X(s) \cdot \phi_Y(s)$$

- Binomialverteilung für $N \rightarrow \infty$ mit $pN = \text{const.} =: \lambda$
 - “Übergang von diskreter auf stetige Zeitachse bei fester mittlerer Rate”
 - $\lambda \equiv$ “mittlere Rate an Treffern pro Zeitabschnitt”
- Beispiele
 - Sternschnuppen pro Stunde
 - Anzahl an Websitebesuchern pro Minute

$$X \sim \text{Poisson}(\lambda)$$

$$P_X(n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$$

$$\phi_X(s) = \exp(\lambda(e^{js} - 1))$$

$$E(X) = \lambda$$

$$V(X) = \lambda$$

Poisson-Verteilung

$$X \sim \text{Poisson}(\lambda)$$

$$P_X(n) = \frac{\lambda^n \cdot e^{-\lambda}}{n!}$$

$$\phi_X(s) = \exp(\lambda(e^{js} - 1))$$

Binomialentwicklung

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a + b)^n, \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Faltungssatz (diskrete ZV)

$$Z = X + Y, \quad X, Y \text{ unabhängig}$$

$$P_Z(n) = \sum_{k=0}^n P_X(k) P_Y(n-k)$$

Charakteristische Funktion einer Summe von ZV

$$Z = X + Y, \quad X, Y \text{ unabhängig}$$

$$\phi_Z(s) = \phi_X(s) \cdot \phi_Y(s)$$

Aufgabe 1:

Faltungssatz & Charakteristische Funktion

Es seien zwei unabhängige poissonverteilte Zufallsvariablen X und Y mit den Parametern λ_1 bzw. λ_2 gegeben.

- a) Zeigen Sie, dass die Summe $Z = X + Y$ ebenfalls Poisson-verteilt ist mit dem Parameter $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$. Nutzen Sie dazu den Faltungssatz für die Addition zweier Zufallsvariablen.
- b) Erbringen Sie denselben Nachweis mithilfe der charakteristischen Funktion.

Aufgabe 1:

Faltungssatz & Charakteristische Funktion

Es seien zwei unabhängige poissonverteilte Zufallsvariablen X und Y mit den Parametern λ_1 bzw. λ_2 gegeben.

- a) Zeigen Sie, dass die Summe $Z = X + Y$ ebenfalls Poisson-verteilt ist mit dem Parameter $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$. Nutzen Sie dazu den Faltungssatz für die Addition zweier Zufallsvariablen.

$$X \sim \text{Poisson}(\lambda_1) \Leftrightarrow P_X(n) = \frac{\lambda_1^n \cdot e^{-\lambda_1}}{n!} \qquad Y \sim \text{Poisson}(\lambda_2) \Leftrightarrow P_Y(n) = \frac{\lambda_2^n \cdot e^{-\lambda_2}}{n!}$$

$$\begin{aligned} P_Z(n) &= P_{X+Y}(n) = \sum_{k=0}^n P_X(k) P_Y(n-k) = \sum_{k=0}^n \frac{\lambda_1^k \cdot e^{-\lambda_1}}{k!} \cdot \frac{\lambda_2^{n-k} \cdot e^{-\lambda_2}}{(n-k)!} \\ &= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!(n-k)!} \lambda_1^k \lambda_2^{n-k} \\ &= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \lambda_1^k \lambda_2^{n-k} \\ &= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \lambda_1^k \lambda_2^{n-k} = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!} (\lambda_1 + \lambda_2)^n =: \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow Z \sim \text{Poisson}(\lambda_1 + \lambda_2)$$

Aufgabe 1:

Faltungssatz & Charakteristische Funktion

b) Erbringen Sie denselben Nachweis mithilfe der charakteristischen Funktion.

$$X \sim \text{Poisson}(\lambda_1) \Leftrightarrow \phi_X(s) = \exp(\lambda_1(e^{js} - 1)) \qquad Y \sim \text{Poisson}(\lambda_2) \Leftrightarrow \phi_Y(s) = \exp(\lambda_2(e^{js} - 1))$$

$$\begin{aligned}\phi_Z(s) &= \phi_X(s) \cdot \phi_Y(s) \\ &= \exp(\lambda_1(e^{js} - 1)) \cdot \exp(\lambda_2(e^{js} - 1)) \\ &= \exp((\lambda_1 + \lambda_2)(e^{js} - 1))\end{aligned}$$

$$\Rightarrow Z \sim \text{Poisson}(\lambda_1 + \lambda_2)$$

■ Randdichte

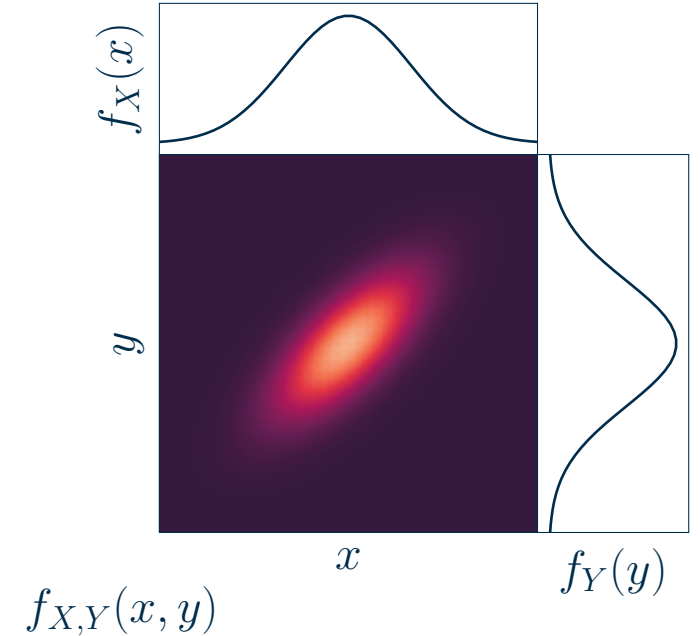
$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dy$$

■ Umrechnung von Dichten mit dem Transformationssatz

$$X = h_1(U, V), \quad Y = h_2(U, V)$$

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u} x & \frac{\partial}{\partial v} x \\ \frac{\partial}{\partial u} y & \frac{\partial}{\partial v} y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u} h_1(u, v) & \frac{\partial}{\partial v} h_1(u, v) \\ \frac{\partial}{\partial u} h_2(u, v) & \frac{\partial}{\partial v} h_2(u, v) \end{pmatrix}$$

$$f_{U,V}(u, v) = |\det(\mathcal{J})| \cdot f_{X,Y}(h_1(u, v), h_2(u, v))$$



■ Unabhängige ZV (stetig)

$$X, Y \text{ unabhängig} \Leftrightarrow f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$$

■ Kovarianz

$$\begin{aligned}\text{cov}(X, Y) &= E\left((X - E(X))(Y - E(Y))\right) \\ &= E(XY) - E(X)E(Y)\end{aligned}$$

■ Korrelation

■ Korrelationskoeffizient

$$\rho_{XY} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}$$

Erinnerung: Unabhängige Ereignisse

$$A, B \text{ unabhängig} \Leftrightarrow P(AB) = P(A)P(B)$$

Erinnerung: Varianz

$$V(X) = E\left((X - E(X))^2\right) = E(X^2) - E^2(X)$$

$$E(XY)$$

$$\rho_{XY} = 0 \Leftrightarrow E(XY) = E(X)E(Y)$$

Unabhängigkeit & Korrelation II

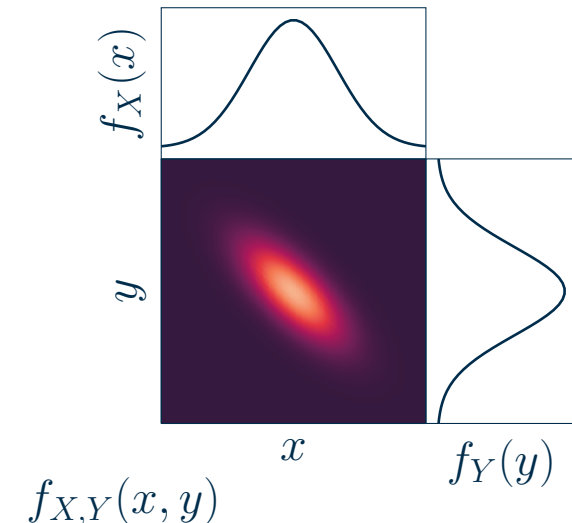
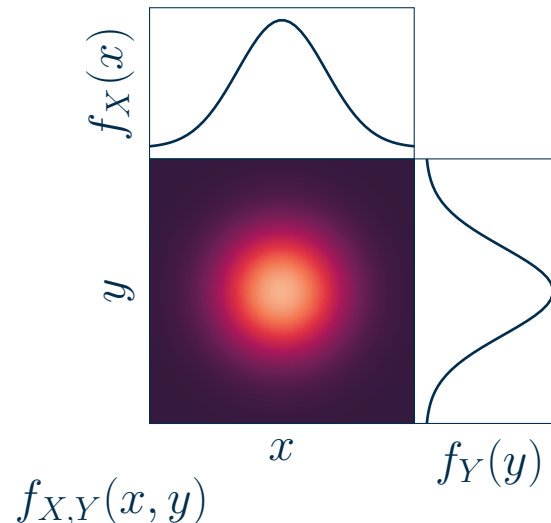
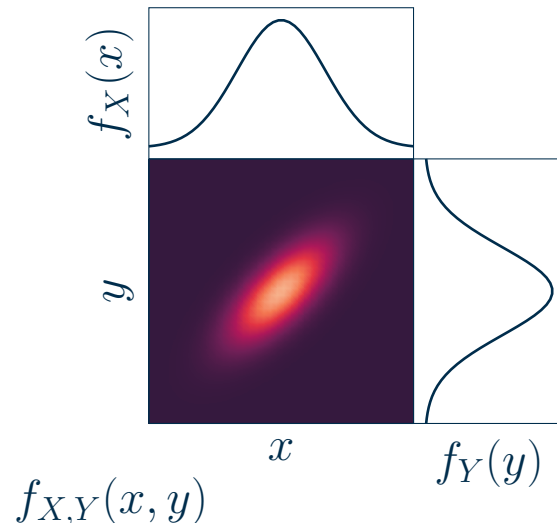
- Korrelation misst einen linearen Zusammenhang zwischen zwei ZV.
Unabhängigkeit gibt an ob zwei ZV “überhaupt zusammenhängen”

$$X, Y \text{ unabhängig} \Rightarrow X, Y \text{ unkorreliert}$$

- Bei gemeinsam normalverteilten ZV gilt zusätzlich

$$X, Y \text{ unkorreliert} \Rightarrow X, Y \text{ unabhängig}$$

- Korrelation und Unabhängigkeit haben nichts mit den Einzelverteilungen zu tun. Sie sind “eine Ebene höher”



Korrelationskoeffizient

$$\rho_{XY} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}$$

Kovarianz

$$\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Randdichte

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dy$$

Umrechnung von Dichten mit dem Transformationssatz

$$X = h_1(U, V), \quad Y = h_2(U, V)$$

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u} x & \frac{\partial}{\partial v} x \\ \frac{\partial}{\partial u} y & \frac{\partial}{\partial v} y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u} h_1(u, v) & \frac{\partial}{\partial v} h_1(u, v) \\ \frac{\partial}{\partial u} h_2(u, v) & \frac{\partial}{\partial v} h_2(u, v) \end{pmatrix}$$

$$f_{U,V}(u, v) = |\det(\mathcal{J})| \cdot f_{X,Y}(h_1(u, v), h_2(u, v))$$

Erwartungswert & Varianz

$$V(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - E^2(X)$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$$

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx$$

Aufgabe 2: Transformationssatz für 2D-Dichten



Die Zufallsvariable $(X; Y)^T$ habe die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichte $f(x, y) = x + y$ für $x, y \in (0; 1]$ und null sonst.

a) Berechnen Sie die Dichte von $(Z = X \cdot Y)$ mithilfe des Transformationssatzes.

b) Verwenden Sie einen alternativen Ansatz zur Berechnung der Dichte.

Hinweis: Beginnen Sie mit $P(Z \leq z) = \dots$

c) Berechnen Sie den Korrelationskoeffizienten ρ_{XY} .

Aufgabe 2: Transformationssatz für 2D-Dichten



Die Zufallsvariable $(X; Y)^T$ habe die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichte $f(x, y) = x + y$ für $x, y \in (0; 1]$ und null sonst.

a) Berechnen Sie die Dichte von $(Z = X \cdot Y)$ mithilfe des Transformationssatzes.

$$\left. \begin{array}{l} U := X \\ V := Z = X \cdot Y \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} X = h_1(U, V) = U \\ Y = h_2(U, V) = \frac{V}{U} \end{array} \right. \quad \left(\begin{array}{l} 0 < x \leq 1 \Rightarrow 0 < u \leq 1 \\ 0 < y \leq 1 \Rightarrow 0 < v \leq u \leq 1 \end{array} \right)$$

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{v}{u^2} & \frac{1}{u} \end{pmatrix}$$

$$f_{U,V}(u, v) = |\det(\mathcal{J})| \cdot f_{X,Y}(h_1(u, v), h_2(u, v)) = \frac{1}{u} \cdot \left(u + \frac{v}{u}\right) = 1 + \frac{v}{u^2}, \quad 0 < v \leq u \leq 1$$

$$f_V(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{U,V}(u, v) du = \int_v^1 1 + \frac{v}{u^2} du = \left[u - \frac{v}{u}\right]_v^1 = 2(1 - v), \quad 0 < v \leq 1$$

$$f_Z(z) = \begin{cases} 2(1 - z) & , \quad 0 < z \leq 1 \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases}$$

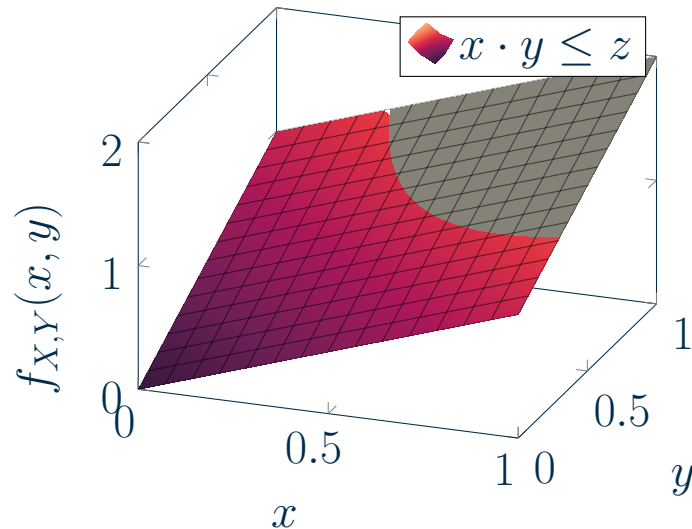


Aufgabe 2: Transformationssatz für 2D-Dichten

b) Verwenden Sie einen alternativen Ansatz zur Berechnung der Dichte.

Hinweis: Beginnen Sie mit $P(Z \leq z) = \dots$

Bekannt: $f_{X,Y}(x, y) = x + y$



$$P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^z f_Z(t) dt$$

$$P(Z \leq z) = P(XY \leq z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{z/x} f_{X,Y}(x, y) dy dx$$

$$\begin{aligned} &\stackrel{u=xy}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^z f_{X,Y}\left(x, \frac{u}{x}\right) \frac{1}{x} du dx \\ &= \int_{-\infty}^z \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}\left(x, \frac{u}{x}\right) \frac{1}{x} dx}_{f_Z(u)} du \end{aligned}$$

$$0 < y \leq 1 \Rightarrow 0 < \frac{u}{x} \leq 1 \Rightarrow 0 < u \leq x \leq 1$$

$$f_Z(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}\left(x, \frac{u}{x}\right) \frac{1}{x} dx = \int_u^1 1 + \frac{u}{x^2} dx = 2(1 - u), \quad 0 < u \leq 1$$

Aufgabe 2: Transformationssatz für 2D-Dichten



c) Berechnen Sie den Korrelationskoeffizienten ρ_{XY} .

Bekannt:
$$\begin{cases} f_{X,Y}(x, y) = x + y \\ f_Z(z) = 2(1 - z), \quad Z = X \cdot Y \end{cases}$$

$$\rho_{XY} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}, \quad \text{cov}(X, Y) = \overbrace{E(XY)}^{E(Z)} - E(X)E(Y), \quad E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$$
$$V(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dy = \int_0^1 x + y dy = \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_0^1 = x + \frac{1}{2}$$

$$f(x, y) = f(y, x) \Rightarrow \begin{cases} E(X) = E(Y) \\ V(X) = V(Y) \end{cases} \Rightarrow \rho_{XY} = \frac{E(Z) - E^2(X)}{E(X^2) - E^2(X)}$$

$$\left. \begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_0^1 x \left(x + \frac{1}{2} \right) dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{4} \right]_0^1 = \frac{7}{12} \\ E(X^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx = \int_0^1 x^2 \left(x + \frac{1}{2} \right) dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{6} \right]_0^1 = \frac{5}{12} \\ E(Z) &= \int_{-\infty}^{\infty} z f_Z(z) dz = \int_0^1 z \cdot 2(1 - z) dz = 2 \left[\frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \rho_{XY} = \frac{\frac{1}{3} - \left(\frac{7}{12} \right)^2}{\frac{5}{12} - \left(\frac{7}{12} \right)^2} = -\frac{1}{11}$$

