WT Tutorium 5

Andreas Tsouchlos

16. Januar 2026

Summen Unabhängiger Zufallsvariablen

$$Z = X + Y, \qquad X, Y \text{ unabhängig}$$

Faltungssatz (diskret): $P_Z(n) = \sum_{k=0}^{n} P_X(k) P_Y(n-k)$

Charakteristische Funktion: $\phi_Z(s) = \phi_X(s) \cdot \phi_Y(s)$

Poisson-Verteilung

- Binomialverteilung für $N \to \infty$ mit $pN = \text{const.} =: \lambda$
  - "Übergang von diskreter auf stetige Zeitachse bei fester mittlerer Rate"
  - $\lambda \equiv$ "mittlere Rate an Treffern pro Zeitabschnitt"
- Beispiele
  - Sternschnuppen pro Stunde
  - Anzahl an Websitebesuchern pro Minute

$$X \sim \text{Poisson}(\lambda)$$

$$P_X(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$
$$\phi_X(s) = \exp\left(\lambda(e^{js} - 1)\right)$$

$$E(X) = \lambda$$
$$V(X) = \lambda$$

Zusammenfassung

Poisson-Verteilung

$$X \sim \text{Poisson}(\lambda)$$

$$P_X(k) = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$$

$$\phi_X(s) = \exp\left(\lambda(e^{js} - 1)\right)$$

Binomialentwicklung

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a+b)^n, \qquad \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k!)k!}$$

Faltungssatz (diskrete ZV)

$$Z = X + Y, \qquad X, Y \text{ unabhängig}$$

$$P_Z(n) = \sum_{k=0}^{n} P_X(k) P_Y(n-k)$$

Charakteristische Funktion einer Summe von ZV

$$Z = X + Y, \qquad X, Y \text{ unabhängig}$$

$$\phi_Z(s) = \phi_X(s) \cdot \phi_Y(s)$$

Aufgabe 1:
Faltungssatz & Charakteristische Funktion

Es seien zwei unabhängige poissonverteilte Zufallsvariablen X und Y mit den Parametern λ_1 bzw. λ_2 gegeben.

a) Zeigen Sie, dass die Summe $Z = X + Y$ ebenfalls Poisson-verteilt ist mit dem Parameter $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$. Nutzen Sie dazu den Faltungssatz für die Addition zweier Zufallsvariablen.

b) Erbringen Sie denselben Nachweis mithilfe der charakteristischen Funktion.

Aufgabe 1: Faltungssatz & Charakteristische Funktion

Es seien zwei unabhängige poissonverteilte Zufallsvariablen X und Y mit den Parametern λ_1 bzw. λ_2 gegeben.

a) Zeigen Sie, dass die Summe $Z = X + Y$ ebenfalls Poisson-verteilt ist mit dem Parameter $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$. Nutzen Sie dazu den Faltungssatz für die Addition zweier Zufallsvariablen.

$$X \sim \text{Poisson}(\lambda_1) \quad \Leftrightarrow \quad P_X(k) = \frac{\lambda_1^k \cdot e^{-\lambda_1}}{k!} \qquad\qquad Y \sim \text{Poisson}(\lambda_2) \quad \Leftrightarrow \quad P_Y(k) = \frac{\lambda_2^k \cdot e^{-\lambda_2}}{k!}$$

$$\begin{aligned}
P_Z(n) = P_{X+Y}(n) &= \sum_{k=0}^{n} P_X(k) P_Y(n-k) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda_1^k \cdot e^{-\lambda_1}}{k!} \cdot \frac{\lambda_2^{n-k} \cdot e^{-\lambda_2}}{(n-k)!} \\
&= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!(n-k)!} \lambda_1^k \lambda_2^{n-k} \\
&= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \lambda_1^k \lambda_2^{n-k} \\
&= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda_1^k \lambda_2^{n-k} = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!} (\lambda_1 + \lambda_2)^n =: \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow Z \sim \text{Poisson}(\lambda_1 + \lambda_2)$$

Aufgabe 1:
Faltungssatz & Charakteristische Funktion

b) Erbringen Sie denselben Nachweis mithilfe der charakteristischen Funktion.

$$X \sim \text{Poisson}(\lambda_1) \quad \Leftrightarrow \quad \phi_X(s) = \exp\left(\lambda_1(e^{js} - 1)\right) \qquad\qquad Y \sim \text{Poisson}(\lambda_1) \quad \Leftrightarrow \quad \phi_Y(s) = \exp\left(\lambda_2(e^{js} - 1)\right)$$

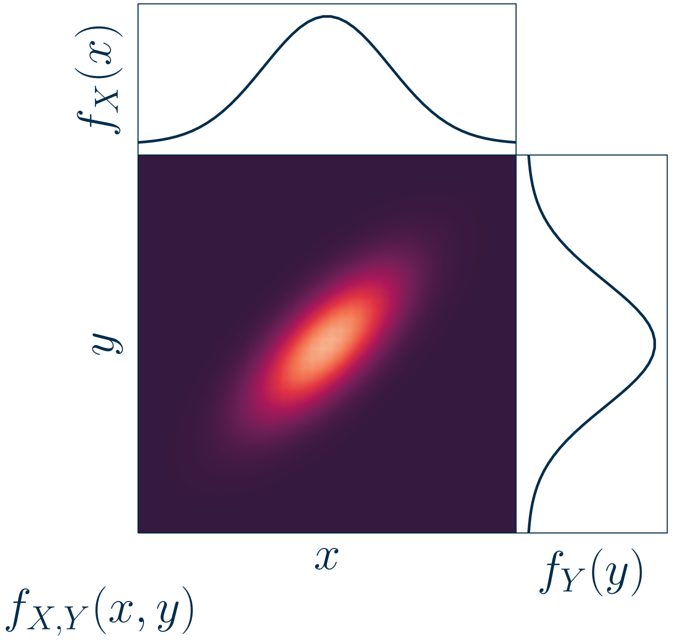
$$\begin{aligned} \phi_Z(s) &= \phi_X(s) \cdot \phi_Y(s) \\ &= \exp\left(\lambda_2(e^{js} - 1)\right) \cdot \exp\left(\lambda_2(e^{js} - 1)\right) \\ &= \exp\left((\lambda_1 + \lambda_2)(e^{js} - 1)\right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow Z \sim \text{Poisson}(\lambda_1 + \lambda_2)$$

Mehrdimensionale Zufallsvariablen

- Randdichte

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy$$



- Umrechnung von Dichten mit dem Transformationssatz

$$X = h_1(U,V), \quad Y = h_2(U,V)$$

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u}x & \frac{\partial}{\partial v}x \\ \frac{\partial}{\partial u}y & \frac{\partial}{\partial v}y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u}h_1(u,v) & \frac{\partial}{\partial v}h_1(u,v) \\ \frac{\partial}{\partial u}h_2(u,v) & \frac{\partial}{\partial v}h_2(u,v) \end{pmatrix}$$

$$f_{U,V}(u,v) = |\det(\mathcal{J})| \cdot f_{X,Y}\big(h_1(u,v), h_2(u,v)\big)$$

Unabhängigkeit & Korrelation I

- Unabhängige ZV (stetig)

$$X, Y \text{ unabhängig} \quad \Leftrightarrow \quad f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$$

Erinnerung: Unabhängige Ereignisse

$$X, Y \text{ unabhängig} \quad \Leftrightarrow \quad P(AB) = P(A)P(B)$$

- Kovarianz

$$\begin{aligned} \text{cov}(X, Y) &= E\Big(\big(X - E(X)\big)\big(Y - E(Y)\big)\Big) \\ &= E(XY) - E(X)E(Y) \end{aligned}$$

Erinnerung: Varianz

$$V(X) = E\Big(\big(X - E(X)\big)^2\Big) = E(X^2) - E^2(X)$$

- Korrelation

$$E(XY)$$

- Korrelationskoeffizient

$$\rho_{XY} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}$$

$$\rho_{XY} = 0 \;\Leftrightarrow\; E(XY) = E(X)E(Y)$$

Unabhängigkeit & Korrelation II

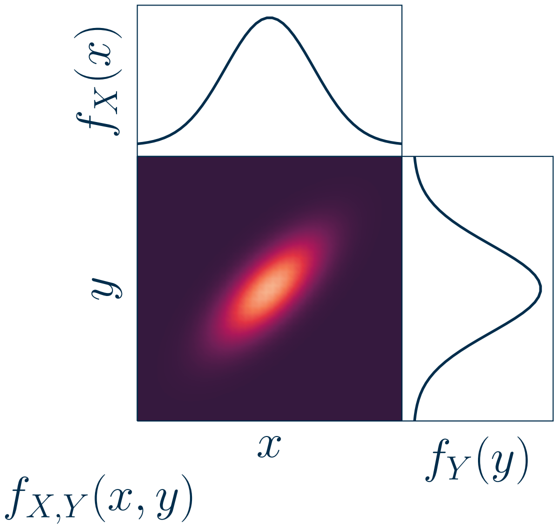
- Korrelation misst einen linearen Zusammenhang zwischen zwei ZV.
  Unabhängigkeit gibt an ob zwei ZV "überhaupt zusammenhängen"

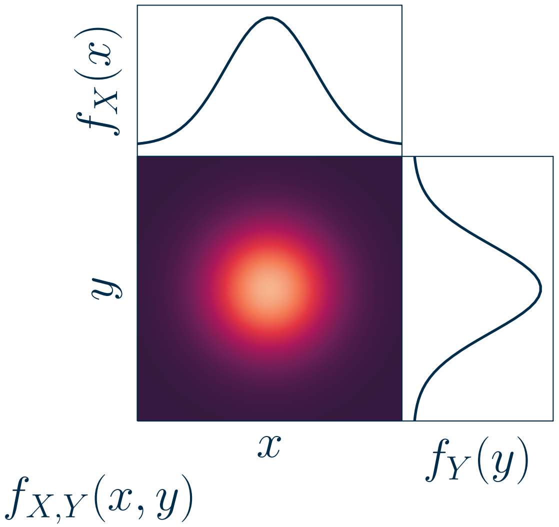
$$X, Y \text{ unabhängig} \quad \Rightarrow \quad X, Y \text{ unkorreliert}$$

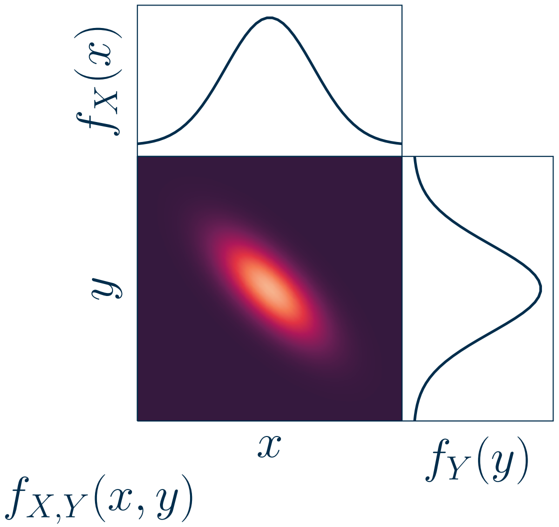
- Bei gemeinsam normalverteilten ZV gilt zusätzlich

$$X, Y \text{ unkorreliert} \quad \Rightarrow \quad X, Y \text{ unabhängig}$$

- Korrelation und Unabhängigkeit haben nichts mit den Einzelverteilungen zu tun. Sie sind "eine Ebene höher"







Zusammenfassung

Korrelationskoeffizient

$$\rho_{XY} = \frac{\mathrm{cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}$$

Kovarianz

$$\mathrm{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Randdichte

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)dy$$

Umrechnung von Dichten mit dem Transformationssatz

$$X = h_1(U, V), \quad Y = h_2(U, V)$$

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u}x & \frac{\partial}{\partial v}x \\ \frac{\partial}{\partial u}y & \frac{\partial}{\partial v}y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u}h_1(u, v) & \frac{\partial}{\partial v}h_1(u, v) \\ \frac{\partial}{\partial u}h_2(u, v) & \frac{\partial}{\partial v}h_2(u, v) \end{pmatrix}$$

$$f_{U,V}(u, v) = |\mathrm{det}(\mathcal{J})| \cdot f_{X,Y}\big(h_1(u, v), h_2(u, v)\big)$$

Erwartungswert & Varianz

$$V(X) = E\big((X - E(X))^2\big) = E(X^2) - E^2(X)$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx$$

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)dx$$

Aufgabe 2: Transformationssatz für 2D-Dichten

Die Zufallsvariable $(X;Y)^T$ habe die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichte $f(x,y) = x + y$ für $x, y \in (0;1]$ und null sonst.

a) Berechnen Sie die Dichte von $(Z = X \cdot Y)$ mithilfe des Transformationssatzes.

b) Verwenden Sie einen alternativen Ansatz zur Berechnung der Dichte.
Hinweis: Beginnen Sie mit $P(Z \leq z) = \dots$

c) Berechnen Sie den Korrelationskoeffizienten ρ_{XY} .

Aufgabe 2: Transformationssatz für 2D-Dichten

Die Zufallsvariable $(X;Y)^T$ habe die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichte $f(x,y) = x + y$ für $x, y \in (0;1]$ und null sonst.

a) Berechnen Sie die Dichte von $(Z = X \cdot Y)$ mithilfe des Transformationssatzes.

$$\left.\begin{array}{l} U := X \\ V := Z = X \cdot Y \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} X = h_1(U,V) = U \\ Y = h_2(U,V) = \frac{V}{U} \end{array}\right. \qquad \begin{pmatrix} 0 < x \leq 1 \Rightarrow 0 < u \leq 1 \\ 0 < y \leq 1 \Rightarrow 0 < v \leq u \leq 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{v}{u^2} & \frac{1}{u} \end{pmatrix}$$

$$f_{U,V}(u,v) = |\mathrm{det}(\mathcal{J})| \cdot f_{X,Y}\big(h_1(u,v), h_2(u,v)\big) = \frac{1}{u} \cdot \left(u + \frac{v}{u}\right) = 1 + \frac{v}{u^2}, \qquad 0 < v \leq u \leq 1$$

$$f_V(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{U,V}(u,v)du = \int_v^1 1 + \frac{v}{u^2} du = \left[u - \frac{v}{u}\right]_v^1 = 2(1-v), \qquad 0 < v \leq 1$$

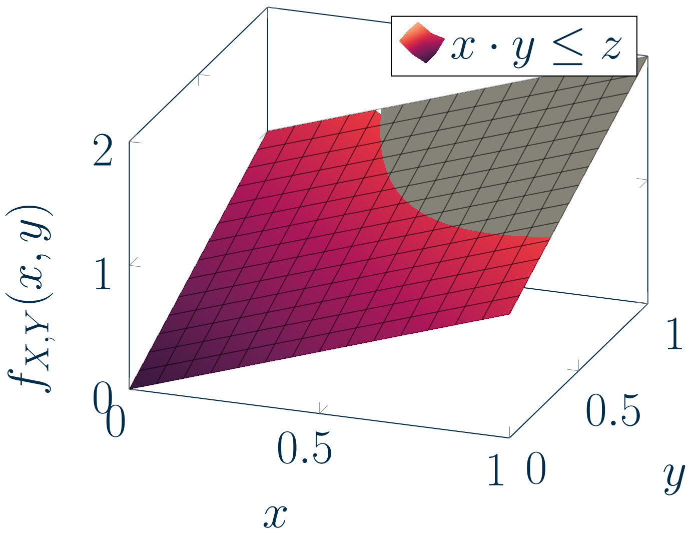
$$f_Z(z) = \begin{cases} 2(1-z) & , \ 0 < z \leq 1 \\ 0 & , \ \text{sonst} \end{cases}$$

Aufgabe 2: Transformationssatz für 2D-Dichten

b) Verwenden Sie einen alternativen Ansatz zur Berechnung der Dichte.
Hinweis: Beginnen Sie mit $P(Z \leq z) = \dots$

Bekannt: $f_{X,Y}(x,y) = x + y$

$$P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^{z} f_Z(t)dt$$



$$P(Z \leq z) = P(XY \leq z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{z/x} f_{X,Y}(x,y)dydx$$

$$\overset{\substack{u=xy\\du=xdy}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{z} f_{X,Y}(x, \frac{u}{x}) \frac{1}{x}\, dudx$$

$$= \int_{-\infty}^{z} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, \frac{u}{x}) \frac{1}{x}\, dx}_{f_Z(u)}\, du$$

$$0 < y \leq 1 \quad \Rightarrow \quad 0 < \frac{u}{x} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad 0 < u \leq x \leq 1$$

$$f_Z(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, \frac{u}{x}) \frac{1}{x}\, dx = \int_{z}^{1} 1 + \frac{u}{x^2} dx = 2(1-u), \quad 0 < u \leq 1$$

Aufgabe 2: Transformationssatz für 2D-Dichten

c) Berechnen Sie den Korrelationskoeffizienten ρ_{XY}.

Bekannt: $\begin{cases} f_{X,Y}(x,y) = x+y \\ f_Z(z) = 2(1-z), \qquad Z = X \cdot Y \end{cases}$

$$\rho_{XY} = \frac{\text{cov}(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}, \qquad \text{cov}(X,Y) = \overbrace{E(XY)}^{E(Z)} - E(X)E(Y)\ , \qquad E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx$$

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy = \int_0^1 x + ydy = \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_0^1 = x + \frac{1}{2}$$

$$f(x,y) = f(y,x) \Rightarrow \begin{cases} E(X) = E(Y) \\ V(X) = V(Y) \end{cases} \Rightarrow \quad \rho_{XY} = \frac{E(Z) - E^2(X)}{E(X^2) - E^2(X)}$$

$$\left.\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx = \int_0^1 x(x+\frac{1}{2})dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{4}\right]_0^1 = \frac{7}{12} \\ E(X^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)dx = \int_0^1 x^2(x+\frac{1}{2})dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{6}\right]_0^1 = \frac{5}{12} \\ E(Z) &= \int_{-\infty}^{\infty} z f_Z(z)dz = \int_0^1 z \cdot 2(1-z)dz = 2\left[\frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \rho_{XY} = \frac{\frac{1}{3} - (\frac{7}{12})^2}{\frac{5}{12} - (\frac{7}{12})^2} = -\frac{1}{11}$$