WT Tutorium 4

Andreas Tsouchlos

19. Dezember 2025

Stetige Zufallsvariablen I

Erinnerung: Diskrete Zufallsvariablen

Verteilung: $P_X(x) = P(X = x)$

Verteilungsfunktion: $F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{n: x_n \leq y} P_X(x)$

- Verteilungsfunktion $F_X(x)$ einer stetigen ZV

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

Eigenschaften:

$$\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$$
$$\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$$
$$x_1 \leq x_2 \Rightarrow F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$$
$$F_X(x+) = \lim_{h \to 0^+} F_X(x+h) = F_X(x)$$

- Wahrscheinlichkeitsdichte $f_X(x)$ einer stetigen ZV

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u) du$$

Eigenschaften:

$$f_X(x) \geq 0$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$$

Stetige Zufallsvariablen II

- Wichtige Kenngrößen

$$\text{Erwartungswert:} \quad E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx \qquad \big(= \mu\big)$$

$$\text{Varianz:} \quad V(X) = E\big((X - E(X))^2\big)$$

$$\text{Standardabweichung:} \quad \sqrt{V(X)} \qquad \big(= \sigma\big)$$

Erinnerung: Diskrete Zufallsvariablen

$$\text{Erwartungswert:} \quad E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n P_X(x)$$

$$\text{Varianz:} \quad V(X) = E\big((X - E(X))^2\big)$$

Zusammenfassung

Verteilungsfunktion (stetige ZV)

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

$$P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$$

$$\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$$
$$\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$$
$$x_1 \leq x_2 \Rightarrow F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$$
$$F_X(x+) = \lim_{h \to 0^+} F_X(x+h) = F_X(x)$$

Wahrscheinlichkeitsdichte

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u) du$$

$$f_X(x) \geq 0$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$$

Aufgabe 1: Stetige Verteilungen

Die Zufallsvariable X besitze die Dichte

$$f_X(x) = \begin{cases} C \cdot xe^{-ax^2}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

mit dem Parameter $a > 0$.

a) Bestimmen Sie den Koeffizienten C, sodass $f_X(x)$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist. Welche Eigenschaften muss eine **Wahrscheinlichkeitsdichte** erfüllen? Skizzieren Sie $f_X(x)$ für $a = 0{,}5$.

b) Welche Eigenschaften muss eine **Verteilungsfunktion** erfüllen?

c) Berechnen und skizzieren Sie die Verteilungsfunktion $F_X(x)$.

d) Welche Wahrscheinlichkeit hat das Ereignis $\{\omega : 1 < X(\omega) \leq 2\}$?

Aufgabe 1: Stetige Verteilungen

Die Zufallsvariable X besitze die Dichte

$$f_X(x) = \begin{cases} C \cdot xe^{-ax^2}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

mit dem Parameter $a > 0$.

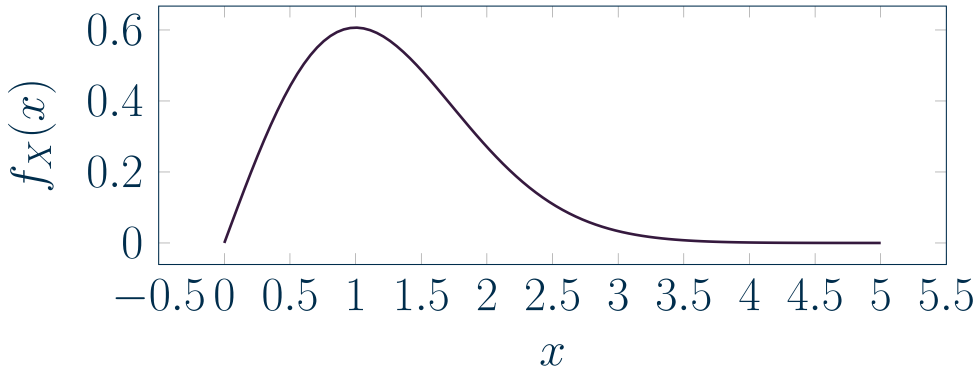
a) Bestimmen Sie den Koeffizienten C, sodass $f_X(x)$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist. Welche Eigenschaften muss eine **Wahrscheinlichkeitsdichte** erfüllen? Skizzieren Sie $f_X(x)$ für $a = 0{,}5$.

$$\text{Eigenschaften:} \quad \begin{cases} f_X(x) & \geq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx & = 1 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = \int_0^{\infty} C \cdot xe^{-ax^2}dx = \frac{C}{-2a}\int_0^{\infty}(-2ax)e^{-ax^2}dx$$

$$= \frac{C}{-2a}\int_0^{\infty}(e^{-ax^2})'dx = \frac{C}{-2a}\Big[e^{-ax^2}\Big]_0^{\infty} \overset{!}{=} 1 \qquad \Rightarrow C = 2a$$

$$f_X(x) = \begin{cases} 2ax \cdot e^{-ax^2}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$



Aufgabe 1: Stetige Verteilungen

b) Welche Eigenschaften muss eine **Verteilungsfunktion** erfüllen?

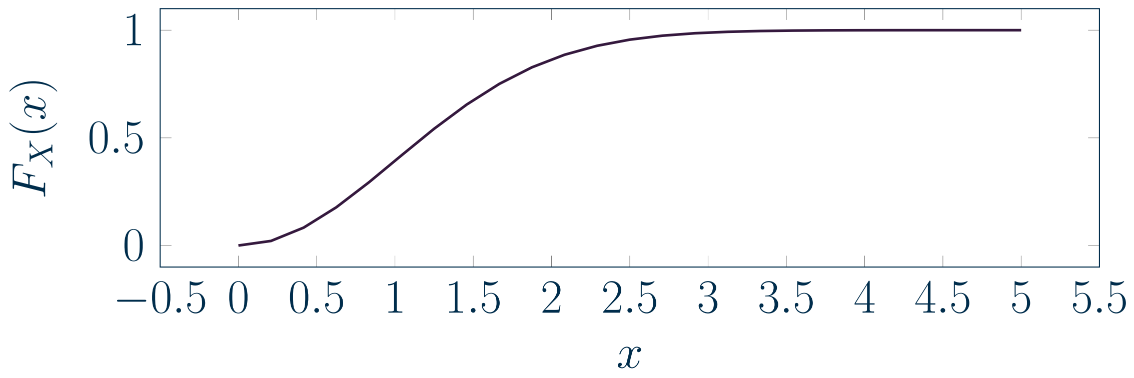
$$\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0 \qquad x_1 \le x_2 \Rightarrow F_X(x_1) \le F_X(x_2)$$

$$\lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1 \qquad F_X(x+) = \lim_{h\to0^+} F_X(x+h) = F_X(x)$$

c) Berechnen und skizzieren Sie die Verteilungsfunktion $F_X(x)$.

$$f_X(x) = 2ax \cdot e^{-ax^2}, \quad x \ge 0$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du = \begin{cases} \int_0^x 2au \cdot e^{-au^2} du, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} \left[-e^{-au^2}\right]_0^x, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 - e^{-ax^2}, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$



d) Welche Wahrscheinlichkeit hat das Ereignis $\{\omega : 1 < X(\omega) \le 2\}$?

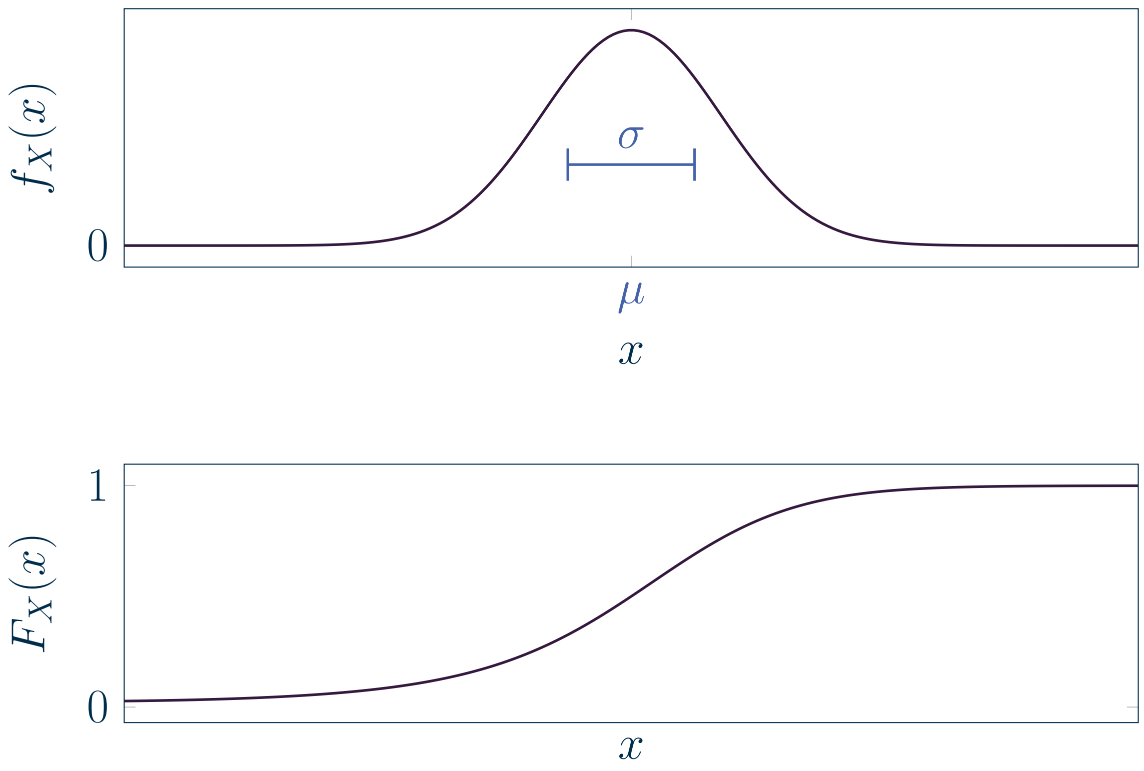
$$P(\{\omega : 1 < X(\omega) \le 2\}) = P(1 < X \le 2) = F_X(2) - F_X(1) = e^{-a} - e^{-4a}$$

Die Normalverteilung

$$X \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) du$$



Rechnen mithilfe der Standardnormalverteilung

- Die Standardnormalverteilung

$$X \sim \mathcal{N}(0,1)$$

$$\Phi(x) := F_X(x) = P(X \leq x)$$
$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,500000	0,10	0,539828	0,20	0,579260
0,02	0,507978	0,12	0,547758	0,22	0,587064
0,04	0,515953	0,14	0,555670	0,24	0,594835
0,06	0,523922	0,16	0,563559	0,26	0,602568
0,08	0,531881	0,18	0,571424	0,28	0,610261

- Standardisierte ZV

$$E(X) = 0$$
$$V(X) = 1$$

Standardisierung: $\widetilde{X} = \dfrac{X - E(X)}{\sqrt{V(X)}} = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$

Rechenbeispiel

$$X \sim \mathcal{N}(\mu = 1, \sigma^2 = 0{,}5^2)$$

$$P\left(X \leq 1{,}12\right) = P\left(\frac{X-1}{0{,}5} \leq \frac{1{,}12 - 1}{0{,}5}\right) = P(\underbrace{\widetilde{X}}_{\sim\mathcal{N}(0,1)} \leq 0{,}24) = \Phi\left(0{,}24\right) = 0{,}594835$$

Zusammenfassung

Standardnormalverteilung

$$X \sim \mathcal{N}(0,1)$$

$$\Phi(x) := F_X(x) = P(X \leq x)$$
$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

Standardisierung

$$\widetilde{X} = \frac{X - E(X)}{\sqrt{V(X)}} = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,40	0,919243	2,80	0,997445	3,00	0,998650	4,20	0,999987
1,42	0,922196	2,82	0,997599	3,02	0,998736	4,22	0,999988
1,44	0,925066	2,84	0,997744	3,04	0,998817	4,24	0,999989
1,46	0,927855	2,86	0,997882	3,06	0,998893	4,26	0,999990
1,48	0,930563	2,88	0,998012	3,08	0,998965	4,28	0,999991

Aufgabe 2: Normalverteilung

In einem Produktionsprozess werden Ladegeräte für Mobiltelefone hergestellt. Bevor die Ladegeräte mit den Mobiltelefonen zusammen verpackt werden, wird die Ladespannung von jedem Ladegerät einmal gemessen. Die Messwerte der Ladespannungen der verschiedenen Ladegeräte genüge näherungsweise einer normalverteilten Zufallsvariablen mit $\mu = 5$ Volt und $\sigma = 0,07$ Volt. Alle Ladegeräte, bei denen die Messung um mehr als 4 % vom Sollwert $S = 5$ Volt abweicht, sollen aussortiert werden.

a) Wie viel Prozent der Ladegeräte werden aussortiert?

b) Der Hersteller möchte seinen Produktionsprozess so verbessern, dass nur noch halb so viele Ladegeräte wie in a) aussortiert werden. Auf welchen Wert müsste er dazu σ senken?

c) Durch einen Produktionsfehler verschiebt sich der Mittelwert μ auf $5{,}1$ Volt (σ ist $0{,}07$ Volt). Wie groß ist jetzt der Prozentsatz, der aussortiert wird?

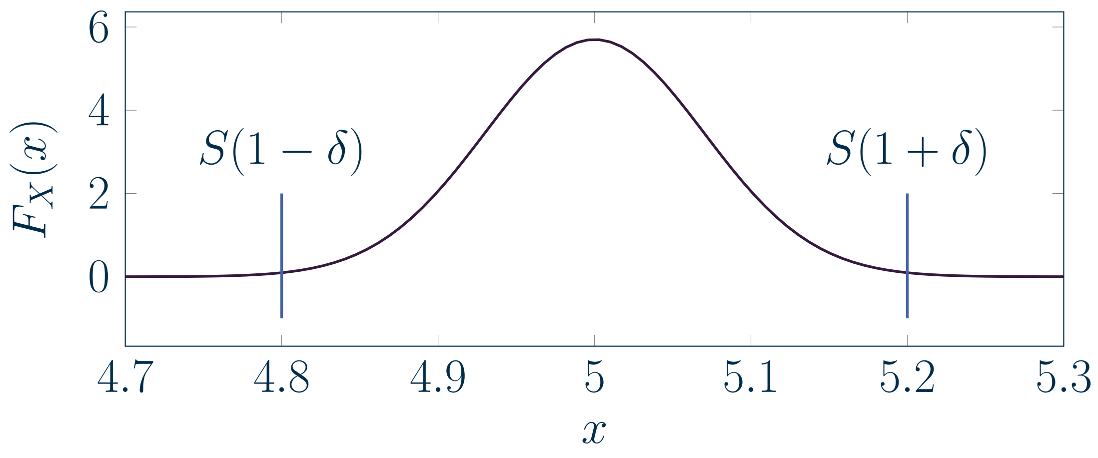
Aufgabe 2: Normalverteilung

In einem Produktionsprozess werden Ladegeräte für Mobiltelefone hergestellt. Bevor die Ladegeräte mit den Mobiltelefonen zusammen verpackt werden, wird die Ladespannung von jedem Ladegerät einmal gemessen. Die Messwerte der Ladespannungen der verschiedenen Ladegeräte genüge näherungsweise einer normalverteilten Zufallsvariablen mit $\mu = 5$ Volt und $\sigma = 0,07$ Volt. Alle Ladegeräte, bei denen die Messung um mehr als 4 % vom Sollwert $S = 5$ Volt abweicht, sollen aussortiert werden.

a) Wie viel Prozent der Ladegeräte werden aussortiert?

$$X \sim \mathcal{N}\left(\mu = 0{,}5, \sigma^2 = 0{,}07^2\right)$$

$$\begin{aligned}
P(E_\mathsf{a}) &= P\Big(\big(X < S(1-\delta)\big) \cup \big(X > S(1+\delta)\big)\Big) \\
&= P(X < S(1-\delta)) + P(X > S(1+\delta)) \\
&\overset{\widetilde{X} := \frac{X-\mu}{\sigma}}{\equiv} P\left(\widetilde{X} < \frac{S(1-\delta)-\mu}{\sigma}\right) + P\left(\widetilde{X} > \frac{S(1+\delta)-\mu}{\sigma}\right) \\
&\approx \Phi(-2{,}86) + (1 - \Phi(2{,}86)) \\
&= 2 - 2\Phi(2{,}86) \approx 0{,}424\%
\end{aligned}$$



Aufgabe 2: Normalverteilung

b) Der Hersteller möchte seinen Produktionsprozess so verbessern, dass nur noch halb so viele Ladegeräte wie in a) aussortiert werden. Auf welchen Wert müsste er dazu σ senken?

$$P(E_\mathsf{b}) = \frac{1}{2}P(E_\mathsf{a}) \approx 0{,}212\%$$

$$\begin{aligned}
P(E_\mathsf{b}) &\overset{\mathsf{a)}}{=} P\left(\widetilde{X} < \frac{S(1-\delta)-\mu}{\sigma'}\right) + P\left(\widetilde{X} > \frac{S(1+\delta)-\mu}{\sigma'}\right) \\
&= P\left(\widetilde{X} < -\frac{0{,}2}{\sigma'}\right) + P\left(\widetilde{X} > \frac{0{,}2}{\sigma'}\right) \\
&= \Phi\left(-\frac{0{,}2}{\sigma'}\right) + \left(1 - \Phi\left(\frac{0{,}2}{\sigma'}\right)\right) \\
&= 2 - 2\Phi\left(\frac{0{,}2}{\sigma'}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2 - 2\Phi\left(\frac{0{,}2}{\sigma'}\right) &= 2{,}12 \cdot 10^{-3} \\
\Rightarrow \Phi\left(\frac{0{,}2}{\sigma'}\right) &\approx 0{,}9989 \\
\Rightarrow \sigma' \approx \frac{0{,}2}{\Phi^{-1}(0{,}9989)} &\approx \frac{0{,}2}{3{,}08} \approx 0{,}065
\end{aligned}$$

c) Durch einen Produktionsfehler verschiebt sich der Mittelwert μ auf $5{,}1$ Volt (σ ist $0{,}07$ Volt). Wie groß ist jetzt der Prozentsatz, der aussortiert wird?

$$\begin{aligned}
P(E_\mathsf{c}) &\overset{\mathsf{a)}}{=} P\left(\widetilde{X} < \frac{S(1-\delta)-\mu}{\sigma}\right) + P\left(\widetilde{X} > \frac{S(1+\delta)-\mu}{\sigma}\right) \\
&\approx \Phi(-4{,}29) + (1 - \Phi(1{,}43)) \\
&= 2 - \Phi(4{,}29) - \Phi(1{,}43) \approx 7{,}78\%
\end{aligned}$$