WT Tutorium 3

Andreas Tsouchlos

5. Dezember 2025

Zufallsvariablen & Verteilungen

- Zufallsvariablen (ZV)

Idee: “Wegabstrahieren” von Ergebnisraum Ω

$$X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$$
$$\underbrace{P_X(x)}_{\text{Verteilung}} := P(\underbrace{X}_{\text{ZV}} = \underbrace{x}_{\text{Realisierung}})$$

Beispiel: Würfeln mit zwei Würfeln

$$X := \text{“Summe beider Augenzahlen”}$$
$$X : \underbrace{\{(i,j) : i,j \in \{1,\dots,6\}\}}_{\Omega} \mapsto \underbrace{\{2,3,\dots,12\}}_{\in\mathbb{R}}$$

$$A = \text{“Die Summe der Augenzahlen ist 4”}$$

Direkter Weg

$$\begin{aligned} P(A) &= P(\{(1,3),(2,2),(3,1)\}) \\ &= P((1,3)) + P((2,2)) + P((3,1)) \\ &= 3 \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

Über ZV

$$P(A) = P_X(4) = \cdots$$

Verteilungen & Verteilungsfunktionen

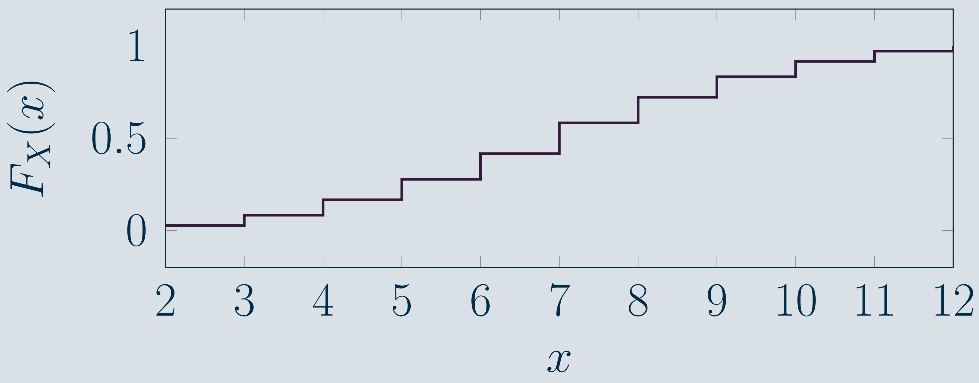
- Verteilungsfunktionen diskreter ZV

$$\overbrace{F_X(x)}^{\text{Verteilungsfunktion}} = P(X \leq x) = \sum_{n:x_n \leq x} \overbrace{P_X(x)}^{\text{Verteilung}}$$

$$= \sum_{n:x_n \leq x} P(X = x)$$

Beispiel: Würfeln mit zwei Würfeln

$X :=$ "Summe beider Augenzahlen"



- Kenngrößen von Verteilungen

Erwartungswert

$$E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n P(X = x_n)$$

$$E(X + b) = E(X) + b$$

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

$$E(aX) = aE(X)$$

Varianz

$$V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$V(aX) = a^2 V(x)$$

$$V(X + b) = V(X)$$

p-Quantil

$$x_p = \inf\{x \in \mathbb{R} : P(X \leq x) \geq p\}$$

$$p = 0.5 \quad \rightarrow \quad x_p \equiv \text{"Median"}$$

Beispiele von Verteilungen

Bernoulli Verteilung

X kann nur die Werte 0 oder 1 annehmen

$$X \sim \text{Bernoulli}(p)$$

$$P(X=0) = 1-p, \quad P(X=1) = p$$

$$E(X) = p$$
$$V(X) = p(1-p)$$

Binomialverteilung

$X \equiv$ "Zählen der Treffer bei N unabhängigen Versuchen"

$$X \sim \text{Bin}(N, p)$$

$$P_X(k) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{1-k}$$

$$E(X) = Np$$
$$V(X) = Np(1-p)$$

Poisson Verteilung

Binomialverteilung für $N \to \infty$ mit $pN = \text{const.} =: \lambda$

$$X \sim \text{Poisson}(\lambda)$$

$$P_X(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$E(X) = \lambda$$
$$V(X) = \lambda$$

Zusammenfassung

Verteilungsfunktion (diskret)

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{n: x_n < x} P_X(x_n)$$

Erwartungswert

$$E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n P(X = x_n)$$

$$\begin{aligned} E(X+b) &= E(X) + b \\ E(X+Y) &= E(X) + E(Y) \\ E(aX) &= aE(X) \end{aligned}$$

Binomialverteilung

$$P_X(k) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{1-k}$$

$$\begin{aligned} E(X) &= Np \\ V(X) &= Np(1-p) \end{aligned}$$

Aufgabe 1: Diskrete Verteilungen

Eine Polizistin führt $N = 6$ Radarkontrollen auf einer Landstraße durch. Die Radarkontrollen können als unabhängig angenommen werden und führen jeweils mit der Wahrscheinlichkeit $p = 0{,}2$ zu einem Strafzettel. Die diskrete Zufallsvariable $R : \Omega \to \mathbb{R}$ beschreibt die Anzahl der Strafzettel in $N = 6$ Kontrollen.

a) Geben Sie den Ergebnisraum Ω der diskreten Zufallsvariablen R an und bestimmen Sie deren Erwartungswert $E(R)$.

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es bei 6 Kontrollen genau 3 Strafzettel gibt?

c) Skizzieren Sie die Verteilungsfunktion $F_R(r)$ der Zufallsvariablen R.

Die folgenden Teilaufgaben können unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben bearbeitet werden.

Ein Autofahrer muss jeden Tag auf seinem Arbeitsweg über die Landstraße und über die Autobahn fahren. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Autofahrer auf der Landstraße bzw. auf der Autobahn zu schnell fährt und einen Strafzettel bekommt, liegt bei $p_{\mathsf{L}} = 0{,}2$ bzw. bei $p_{\mathsf{A}} = 0{,}3$.

Hinweis: Es wird nur der einfache Weg (Hinweg) betrachtet.

d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Autofahrer an einem Tag 0, 1 oder 2 Strafzettel bekommt?

e) Der Autofahrer fährt an 200 unabhängigen Tagen im Jahr über seinen Arbeitsweg zur Arbeit. Wie viele Strafzettel sammelt der Autofahrer innerhalb eines Jahres?

Aufgabe 1: Diskrete Verteilungen

Eine Polizistin führt $N = 6$ Radarkontrollen auf einer Landstraße durch. Die Radarkontrollen können als unabhängig angenommen werden und führen jeweils mit der Wahrscheinlichkeit $p = 0{,}2$ zu einem Strafzettel. Die diskrete Zufallsvariable $R : \Omega \to \mathbb{R}$ beschreibt die Anzahl der Strafzettel in $N = 6$ Kontrollen.

a) Geben Sie den Ergebnisraum Ω der diskreten Zufallsvariablen R an und bestimmen Sie deren Erwartungswert $E(R)$.

$$\Omega = \{0, 1\}^6$$

$$R \sim \mathsf{Bin}(N = 6, p = 0{,}2) \quad \Rightarrow \quad E(R) = Np = 1{,}2$$

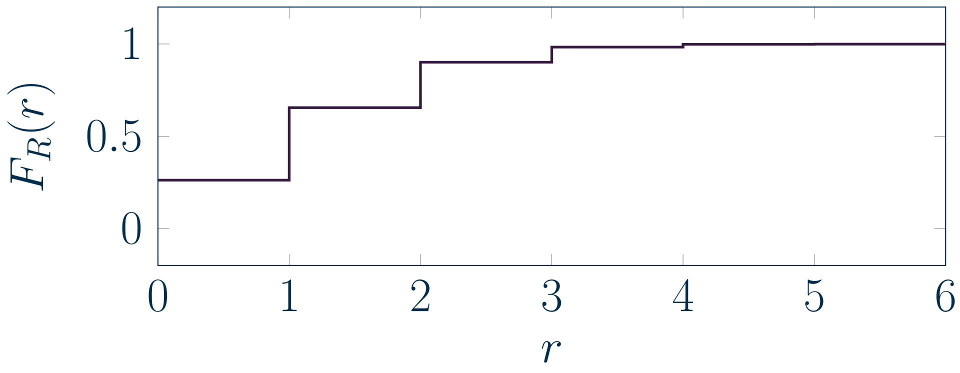
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es bei 6 Kontrollen genau 3 Strafzettel gibt?

$$P(R = 3) = \binom{N}{3} p^3 (1-p)^{N-3} = \binom{6}{3} \cdot 0{,}2^3 \cdot 0{,}8^3 \approx 0{,}0819$$

c) Skizzieren Sie die Verteilungsfunktion $F_R(r)$ der Zufallsvariablen R.

$$F_R(r) = \sum_{\tilde{r} \le r} \binom{N}{\tilde{r}} p^{\tilde{r}} (1-p)^{N-\tilde{r}}$$

r	0	1	2	3	4	5	6
$F_R(r)$	0,262	0,655	0,901	0,983	0,998	0,999	1



Aufgabe 1: Diskrete Verteilungen

Ein Autofahrer muss jeden Tag auf seinem Arbeitsweg über die Landstraße und über die Autobahn fahren. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Autofahrer auf der Landstraße bzw. auf der Autobahn zu schnell fährt und einen Strafzettel bekommt, liegt bei $p_\mathsf{L} = 0{,}2$ bzw. bei $p_\mathsf{A} = 0{,}3$.

Hinweis: Es wird nur der einfache Weg (Hinweg) betrachtet.

d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Autofahrer an einem Tag 0, 1 oder 2 Strafzettel bekommt?

$$R := A + L$$

$$\begin{aligned}
P(R=0) &= P(A=0 \text{ und } L=0) &&= p_A \cdot p_L &&= 0{,}56\\
P(R=1) &= P(A=1 \text{ und } L=0) + P(A=0 \text{ und } L=1) &&= p_A \cdot (1-p_L) + (1-p_A)\cdot p_L &&= 0{,}38\\
P(R=2) &= P(A=1 \text{ und } L=1) &&= (1-p_A)(1-p_L) &&= 0{,}06
\end{aligned}$$

e) Der Autofahrer fährt an 200 unabhängigen Tagen im Jahr über seinen Arbeitsweg zur Arbeit. Wie viele Strafzettel sammelt der Autofahrer innerhalb eines Jahres?

$$E\left(\sum_{n=1}^{200} R_n\right) = \sum_{n=1}^{200} E\left(R_n\right) = \sum_{n=1}^{200} [1 \cdot 0{,}38 + 2 \cdot 0{,}06]$$
$$= 200 \cdot 0{,}5 = 100$$

$$\begin{aligned}
E\left(\sum_{n=1}^{200} R_n\right) &= E\Bigg(\overbrace{\sum_{n=1}^{200} A_n}^{\sim\mathsf{Bin}(N=200, p=0{,}3)} + \overbrace{\sum_{n=1}^{200} L_n}^{\sim\mathsf{Bin}(N=200, p=0{,}2)} \Bigg)\\
&= E\left(\sum_{n=1}^{200} A_n\right) + E\left(\sum_{n=1}^{200} L_n\right)\\
&= 200 \cdot 0{,}3 + 200 \cdot 0{,}2 = 100
\end{aligned}$$

Weitere Kenngrößen von Verteilungen

k-tes Moment

$$E(X^k) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^k P(X = x_n)$$

k-tes zentrales Moment

$$E\left((X - E(X))^k\right) = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n - E(X))^k P(X = x_n)$$

Charakteristische Funktion (diskret)

$$\phi_X(s) = E(e^{jsX}) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{jsx_n} P(X = x_n)$$

$$E(X^k) = \frac{\phi_X^{(k)}(0)}{j^k}$$

Erzeugende Funktion

Voraussetzung: $x \in \mathbb{N}_0$

$$\psi(z) = E(z^x) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n P(x = n)$$

$$P(X = n) = \frac{\psi_X^{(n)}(0)}{n!}$$

Zusammenfassung

Verteilungsfunktion (diskret)

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{n:x_n<x} P_X(x_n)$$

Varianz

$$V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$V(aX) = a^2 V(x)$$

$$V(X + b) = V(X)$$

p-Quantil

$$x_p = \inf\{x \in \mathbb{R} : P(X \leq x) \geq p\}$$

$$p = 0.5 \quad \rightarrow \quad x_p \equiv \text{“Median”}$$

k-tes Moment

$$E(X^k) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^k P(X = x_n)$$

Charakt. Funktion (diskret)

$$\phi_X(s) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{jsx_n} P(X = x_n)$$

$$E(X^k) = \frac{\phi_X^{(k)}(0)}{j^k}$$

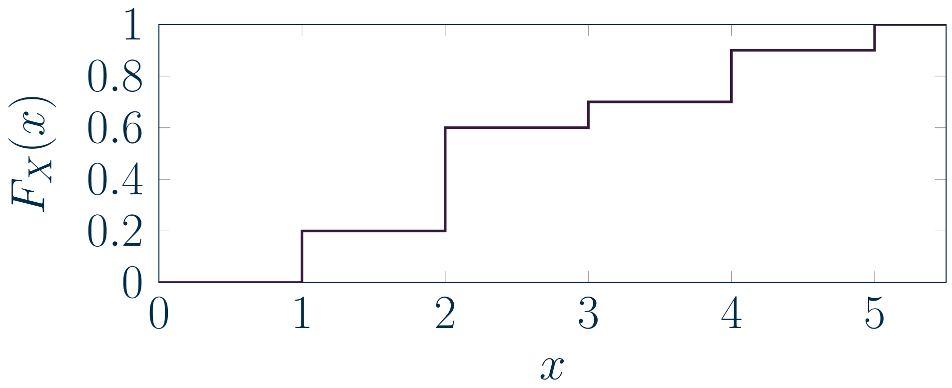
Erzeugende Funktion

$$\psi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n P(x = n)$$

$$P(X = n) = \frac{\psi_X^{(n)}(0)}{n!}$$

Aufgabe 2: Erzeugende & Charakteristische Funktion

Gegeben ist folgende Verteilungsfunktion $F_X(x)$:



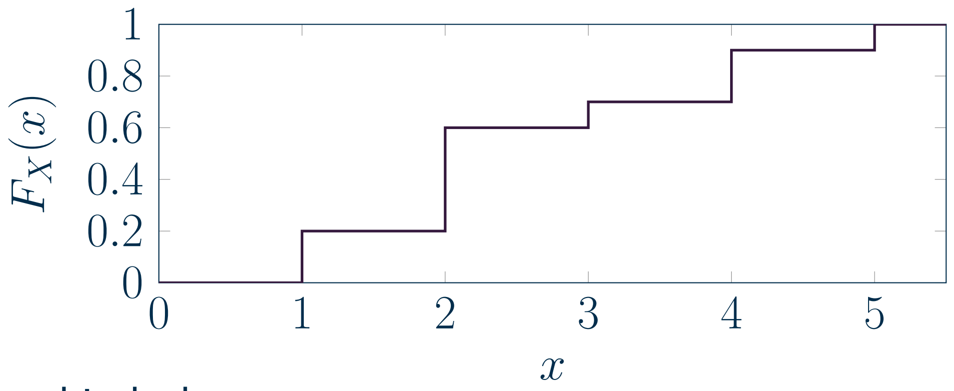
a) Stellen Sie die Verteilung $P_X(x)$ graphisch dar.

b) Geben Sie die erzeugende Funktion $\psi_X(z)$ und die charakteristische Funktion $\phi_X(s)$ an. Berechnen Sie mit mithilfe von $\phi_X(s)$ die Varianz $V(X)$.

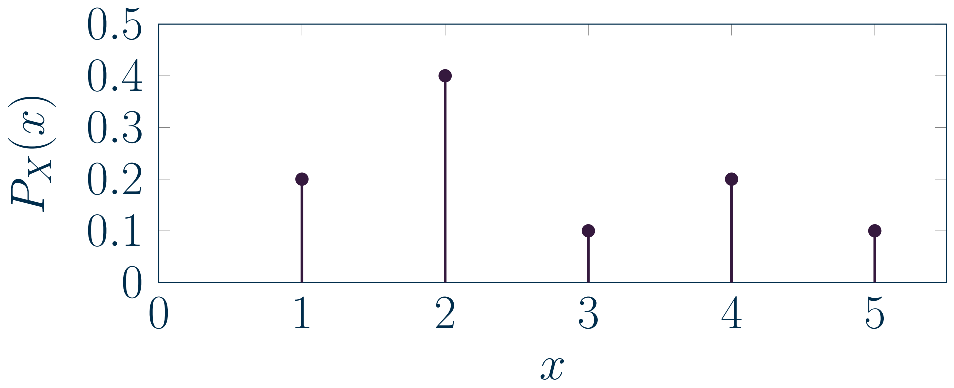
c) Vergleichen Sie den Median und den Erwartungswert von X. Sind beide Kenngrößen gleich? Begründen Sie, welche Eigenschaft einer diskreten Verteilung ausschlaggebend ist, damit beide Werte gleich sind.

Aufgabe 2: Erzeugende & Charakteristische Funktion

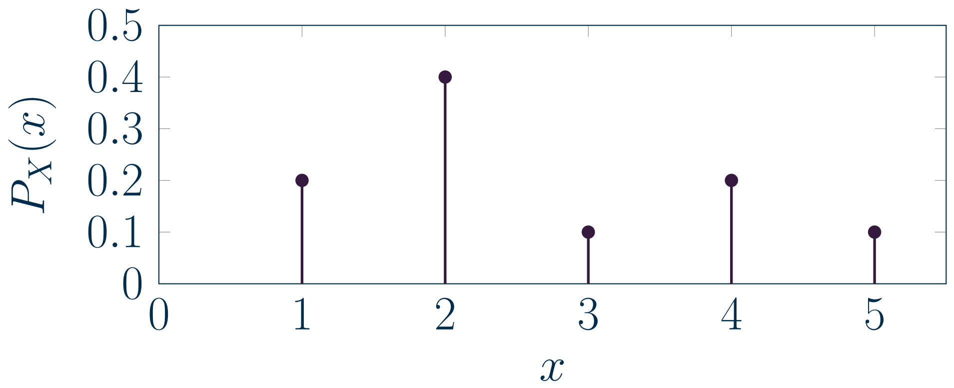
Gegeben ist folgende Verteilungsfunktion $F_X(x)$:



a) Stellen Sie die Verteilung $P_X(x)$ graphisch dar.



Aufgabe 2: Erzeugende & Charakteristische Funktion



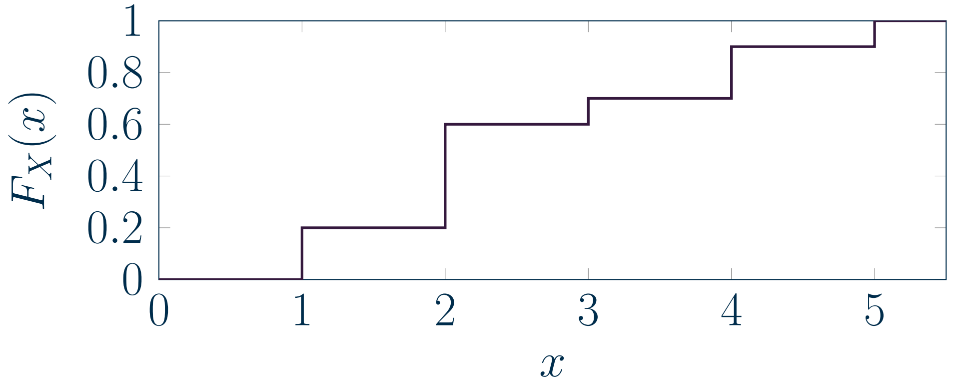
b) Geben Sie die erzeugende Funktion $\psi_X(z)$ und die charakteristische Funktion $\phi_X(s)$ an. Berechnen Sie mit mithilfe von $\phi_X(s)$ die Varianz $V(X)$.

$$\psi_X(z) = \sum_{n=1}^{5} z^n P(X = n) = 0{,}2z + 0{,}4z^2 + 0{,}1z^3 + 0{,}2z^4 + 0{,}1z^5$$

$$\phi_X(s) = \sum_{n=1}^{5} e^{jsx_n} P(X = n) = 0{,}2e^{js} + 0{,}4e^{j2s} + 0{,}1e^{j3s} + 0{,}2e^{j4s} + 0{,}1e^{j5s}$$

$$\left.\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 \\ E(X) &= \frac{\phi'_X(0)}{j} = \sum_{n=1}^{5} nP(X = n) = 2{,}6 \\ E(X^2) &= \frac{\phi''_X(0)}{j^2} = \sum_{n=1}^{5} n^2 P(X = n) = 8{,}4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow V(X) = 8{,}4 - 2{,}6^2 = 1{,}64$$

Aufgabe 2: Erzeugende & Charakteristische Funktion



c) Vergleichen Sie den Median und den Erwartungswert von X. Sind beide Kenngrößen gleich? Begründen Sie, welche Eigenschaft einer diskreten Verteilung ausschlaggebend ist, damit beide Werte gleich sind.

$$x_{1/2} = \inf\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \geq 1/2\} = 2$$
$$E(X) = 2{,}6$$

Median und Erwartungswert sind gleich (bei einer diskreten Verteilung mit ganzzahligen Stützstellen), wenn die Verteilung symmetrisch um denselben Punkt c ist, d.h.,

$$P(c+k) = P(c-k) \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$