WT Tutorium 2

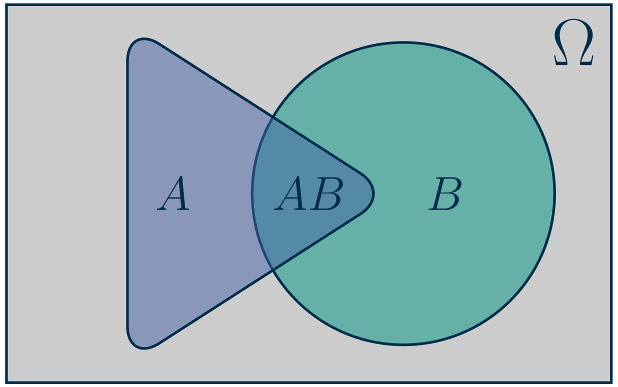
Andreas Tsouchlos

21. November 2025

Bedingte Wahrscheinlichkeiten & Bayes

- Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$



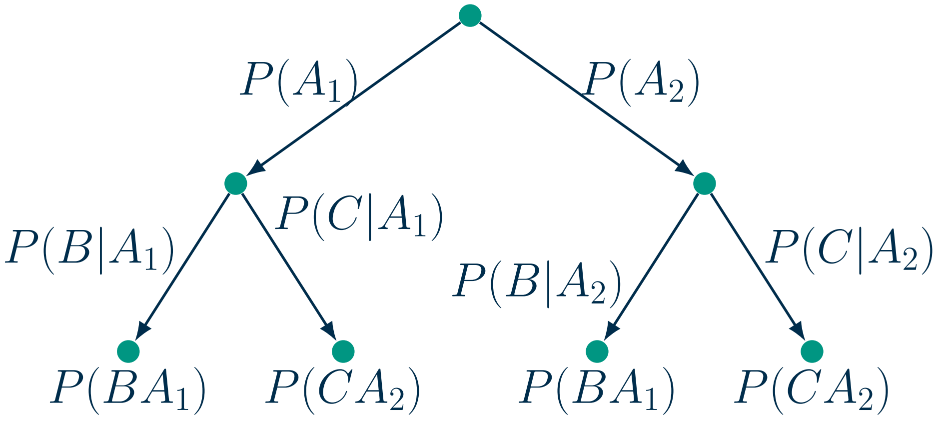
- Formel von Bayes

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

- Satz der totalen Wahrscheinlichkeit

$$\text{Voraussetzungen:} \quad \begin{cases} A_1, A_2, \ldots \ \text{disjunkt} \\ \sum\limits_n A_n = \Omega \end{cases}$$

$$P(B) = \sum_n P(B|A_n)P(A_n)$$



Zusammenfassung

Bedingte Wahrscheinlichkeit

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

Formel von Bayes

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

Satz der totalen Wahrscheinlichkeit

$$P(B) = \sum_n P(B|A_n)P(A_n)$$

Aufgabe 1: Bedingte Wahrscheinlichkeiten & Bayes

In einer Population von gelben Animationsfiguren, den Minions, werden zwei Merkmale unterschieden: Augenzahl und Körpergröße. Es gilt:

- 80% der Minions haben zwei Augen, 20% nur eines.
- Von den zweiäugigen Minions sind 20% groß, 70% mittelgroß und 10% klein.
- Von den einäugigen Minions sind 5% groß, 60% mittelgroß und 35% klein.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewähltes Minion klein, mittelgroß oder groß ist.

b) Ein zufällig ausgewähltes Minion ist nicht klein. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist es einäugig?

Aufgabe 1: Bedingte Wahrscheinlichkeiten & Bayes

In einer Population von gelben Animationsfiguren, den Minions, werden zwei Merkmale unterschieden: Augenzahl und Körpergröße. Es gilt:

- 80% der Minions haben zwei Augen, 20% nur eines.
- Von den zweiäugigen Minions sind 20% groß, 70% mittelgroß und 10% klein.
- Von den einäugigen Minions sind 5% groß, 60% mittelgroß und 35% klein.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewähltes Minion klein, mittelgroß oder groß ist.

$$\begin{aligned} P(K) &= P(K|N_1)P(N_1) + P(K|N_2)P(N_2) = 0.35 \cdot 0.2 + 0.1 \cdot 0.8 = 0.15 \\ P(M) &= P(M|N_1)P(N_1) + P(M|N_2)P(N_2) = \cdots = 0.68 \\ P(G) &= P(G|N_1)P(N_1) + P(G|N_2)P(N_2) = \cdots = 0.17 \end{aligned}$$

b) Ein zufällig ausgewähltes Minion ist nicht klein. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist es einäugig?

$$P(N_1|\overline{K}) = \frac{P(\overline{K}|N_1)P(N_1)}{P(\overline{K})} = \frac{[1 - P(K|N_1)]\, P(N_1)}{1 - P(K)} = \frac{(1 - 0.35) \cdot 0.2}{1 - 0.15} \approx 0.153$$

Zusätzliche Bedingungen und Unabhängigkeit

- Erweiterte Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit

$$P(A|BC) = \frac{P(AB|C)}{P(B|C)}$$

- Satz von Bayes mit zusätzlichen Bedingungen

$$P(A|BC) = \frac{P(B|AC)P(A|C)}{P(B|C)}$$

- Unabhängigkeit

$$A, B \text{ Unabhängig} \quad \Leftrightarrow \quad P(AB) = P(A)P(B) \quad \Leftrightarrow \quad P(A|B) = P(A)$$

Zusammenfassung

Bedingte Wahrscheinlichkeit

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

Formel von Bayes

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

Satz der totalen Wahrscheinlichkeit

$$P(B) = \sum_n P(B|A_n)P(A_n)$$

Unabhängigkeit von Ereignissen

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

Aufgabe 2: Bayes & Unabhängigkeit

Bei einer Qualitätskontrolle können Werkstücke zwei Fehler aufweisen: Fehler A, Fehler B, oder beide Fehler gleichzeitig. Die folgenden Wahrscheinlichkeiten sind bekannt:

- mit Wahrscheinlichkeit $0,05$ hat ein Werkstück den Fehler A
- mit Wahrscheinlichkeit $0,01$ hat ein Werkstück beide Fehler
- mit Wahrscheinlichkeit $0,03$ hat ein Werkstück nur den Fehler B und nicht Fehler A.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von Fehler B und dafür, dass ein Werkstück fehlerfrei ist.

b) Ist das Auftreten von Fehler A unabhängig von Fehler B?

Bei der Kontrolle wird unerwartet ein zusätzlicher, dritter Fehler C beobachtet. Der Fehler tritt mit der Wahrscheinlichkeit $0,01$ ein, wenn weder Fehler A noch B eingetreten sind und mit der Wahrscheinlichkeit $0,02$, wenn sowohl Fehler A als auch B eingetreten sind. In allen anderen Fällen tritt der Fehler C nicht auf.

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von Fehler C.

d) Sie beobachten, dass ein Werkstück den Fehler C hat. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat es auch Fehler A?

Aufgabe 2: Bayes & Unabhängigkeit

Bei einer Qualitätskontrolle können Werkstücke zwei Fehler aufweisen: Fehler A, Fehler B, oder beide Fehler gleichzeitig. Die folgenden Wahrscheinlichkeiten sind bekannt:

- mit Wahrscheinlichkeit $0,05$ hat ein Werkstück den Fehler A
- mit Wahrscheinlichkeit $0,01$ hat ein Werkstück beide Fehler
- mit Wahrscheinlichkeit $0,03$ hat ein Werkstück nur den Fehler B und nicht Fehler A.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von Fehler B und dafür, dass ein Werkstück fehlerfrei ist.

$$P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|\overline{A})P(\overline{A}) = P(AB) + P(\overline{A}B) = 0.01 + 0.03 = 0.04$$

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] = 1 - (0.05 + 0.04 - 0.01) = 0.92$$

b) Ist das Auftreten von Fehler A unabhängig von Fehler B?

$$\left.\begin{aligned} P(AB) &= 0.01 \\ P(A)P(B) &= 0.05 \cdot 0.04 = 0.002 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad P(AB) \neq P(A)P(B) \quad \Rightarrow \quad A, B \text{ nicht unabhängig}$$

Aufgabe 2: Bayes & Unabhängigkeit

Bei der Kontrolle wird unerwartet ein zusätzlicher, dritter Fehler C beobachtet. Der Fehler tritt mit der Wahrscheinlichkeit $0,01$ ein, wenn weder Fehler A noch B eingetreten sind und mit der Wahrscheinlichkeit $0,02$, wenn sowohl Fehler A als auch B eingetreten sind. In allen anderen Fällen tritt der Fehler C nicht auf.

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von Fehler C.

$$\begin{aligned} P(C) &= P(C|AB)P(AB) + \overbrace{P(C|A\overline{B})}^{0}\,P(A\overline{B}) + \overbrace{P(C|\overline{A}B)}^{0}\,P(\overline{A}B) + P(C|\overline{A}\,\overline{B})P(\overline{A}\,\overline{B}) \\ &= 0.02 \cdot 0.01 + 0.01 \cdot 0.92 = 0.0094 \end{aligned}$$

d) Sie beobachten, dass ein Werkstück den Fehler C hat. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat es auch Fehler A?

$$P(A|C) = \frac{P(AC)}{P(C)}$$

$$\begin{aligned} P(AC) &= P(ACB) + P(AC\overline{B}) \\ &= P(C|AB)P(AB) + \overbrace{P(C|A\overline{B})}^{0}\,P(A\overline{B}) \\ &= 0.02 \cdot 0.01 = 0.0002 \end{aligned}$$

$$P(A|C) = \frac{0.0002}{0.0094} \approx 0.0213$$

$$P(A|C) = \frac{P(C|A)P(A)}{P(C)}$$

$$\begin{aligned} P(C|A) &= P(C|AB)P(B|A) + \overbrace{P(C|\overline{A}B)}^{0}\,P(\overline{A}B) \\ &= P(C|AB)\frac{P(AB)}{P(A)} = 0.02 \cdot \frac{0.01}{0.05} = 0.004 \end{aligned}$$

$$P(A|C) = \frac{0.004 \cdot 0.05}{0.0094} \approx 0.0213$$