WT Tutorium 1

Andreas Tsouchlos

7. November 2025

Struktur des Tutoriums

- Ziele
  - Üben/Verstehen der Herangehensweisen Aufgaben zu lösen
  - Wiederholung der für die Aufgaben wichtigsten Teile der Theorie
- Struktur der Tutorien

Abschnitt	Dauer
Aufgabe 1: Theorie Wiederholung	10 min
Aufgabe 1: Selbstrechenphase	20 min
Aufgabe 1: Besprechung der Lösung	10 min
Aufgabe 2: Theorie Wiederholung	10 min
Aufgabe 2: Selbstrechenphase	20 min
Aufgabe 2: Besprechung der Lösung	10 min
Zusammenfassung	10 min

Ereignisse & Laplace

- Ereignisse

Ergebnisraum: $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_N\}$

Ergebnis: ω_i

Ereignis: $A \subseteq \Omega$

Beispiel: Würfeln mit einem Würfel

$$\Omega = \{1, \ldots, 6\}$$
$$A = \{1, 6\}$$

Beispiel: Würfeln mit zwei Würfeln

$$\Omega = \{(i, j) : i, j \in \{1, \ldots, 6\}\}$$
$$A = \{(1, 1), (2, 2), \ldots, (6, 6)\}$$

Ereignisse & Laplace

- Ereignisse

Ergebnisraum: $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_N\}$

Ergebnis: ω_i

Ereignis: $A \subseteq \Omega$

Beispiel: Würfeln mit einem Würfel

$$\Omega = \{1, \ldots, 6\}$$
$$A = \{1, 6\}$$

Beispiel: Würfeln mit zwei Würfeln

$$\Omega = \{(i, j) : i, j \in \{1, \ldots, 6\}\}$$
$$A = \{(1, 1), (2, 2), \ldots, (6, 6)\}$$

- Laplace'sches Zufallsexperiment

$$\text{Voraussetzungen:} \quad \begin{cases} |\Omega| \text{ endlich} \\ P(\omega_i) = \frac{1}{|\Omega|} \end{cases}$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{Anzahl “günstiger” Möglichkeiten}}{\text{Anzahl Möglichkeiten}}$$

Kombinationen und Hypergeometrische Verteilung

- Kombinationen: Ziehen ohne zurücklegen, ohne Betrachtung der Reihenfolge

$$|C_N^{(K)}| = \binom{N}{K} = \frac{N!}{(N-K)!K!}$$

Beispiel: Wie viele mögliche Ergebnisse gibt es beim Lotto "6 aus 49"?

$$\begin{aligned} N &= 49 \\ K &= 6 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \binom{49}{6} = 13983816$$

Kombinationen und Hypergeometrische Verteilung

- Kombinationen: Ziehen ohne zurücklegen, ohne Betrachtung der Reihenfolge

$$|C_N^{(K)}| = \binom{N}{K} = \frac{N!}{(N-K)!K!}$$

Beispiel: Wie viele mögliche Ergebnisse gibt es beim Lotto "6 aus 49"?

$$\begin{matrix} N = 49 \\ K = 6 \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \binom{49}{6} = 13983816$$

- Hypergeometrische Verteilung

$$P_r = \frac{\binom{R}{r}\binom{N-R}{n-r}}{\binom{N}{n}}$$

Beispiel: In einer Urne sind N Kugeln, davon R rot. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit beim ziehen von n Kugeln (ohne Zurücklegen) genau r rote zu erwischen?

Zusammenfassung

Laplace'sches Zufallsexperiment

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{Anzahl “günstiger” Möglichkeiten}}{\text{Anzahl Möglichkeiten}}$$

Kombinationen

$$|C_N^{(K)}| = \binom{N}{K} = \frac{N!}{(N-K)!K!}$$

Hypergeometrische Verteilung

$$P_R = \frac{\binom{R}{r}\binom{N-R}{n-r}}{\binom{N}{n}}$$

Aufgabe 1: Ergebnisraum & Hypergeometrische Verteilung

Bei einem Kartenspiel erhält ein Spieler 5 Karten aus einem Deck von 52 Karten (bestehend aus 13 Arten mit je 4 Farben). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler

a) mindestens ein Ass hat?

b) genau ein Ass hat?

c) mindestens zwei Karten der gleichen Art ("Paar") hat?

Aufgabe 1: Ergebnisraum & Hypergeometrische Verteilung

Bei einem Kartenspiel erhält ein Spieler 5 Karten aus einem Deck von 52 Karten (bestehend aus 13 Arten mit je 4 Farben). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler

a) mindestens ein Ass hat?

Aufgabe 1: Ergebnisraum & Hypergeometrische Verteilung

Bei einem Kartenspiel erhält ein Spieler 5 Karten aus einem Deck von 52 Karten (bestehend aus 13 Arten mit je 4 Farben). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler

a) mindestens ein Ass hat?

$$P(\text{mindestens ein Ass}) = 1 - P(\text{kein Ass}) = 1 - \frac{\binom{4}{0}\binom{48}{5}}{\binom{52}{5}} \approx 0,341$$

Aufgabe 1: Ergebnisraum & Hypergeometrische Verteilung

Bei einem Kartenspiel erhält ein Spieler 5 Karten aus einem Deck von 52 Karten (bestehend aus 13 Arten mit je 4 Farben). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler

a) mindestens ein Ass hat?

$$P(\text{mindestens ein Ass}) = 1 - P(\text{kein Ass}) = 1 - \frac{\binom{4}{0}\binom{48}{5}}{\binom{52}{5}} \approx 0,341$$

b) genau ein Ass hat?

Aufgabe 1: Ergebnisraum & Hypergeometrische Verteilung

Bei einem Kartenspiel erhält ein Spieler 5 Karten aus einem Deck von 52 Karten (bestehend aus 13 Arten mit je 4 Farben). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler

a) mindestens ein Ass hat?

$$P(\text{mindestens ein Ass}) = 1 - P(\text{kein Ass}) = 1 - \frac{\binom{4}{0}\binom{48}{5}}{\binom{52}{5}} \approx 0,341$$

b) genau ein Ass hat?

$$P(\text{genau ein Ass}) = \frac{\binom{4}{1}\binom{48}{4}}{\binom{52}{5}} \approx 0,299$$

Aufgabe 1: Ergebnisraum & Hypergeometrische Verteilung

Bei einem Kartenspiel erhält ein Spieler 5 Karten aus einem Deck von 52 Karten (bestehend aus 13 Arten mit je 4 Farben). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler

a) mindestens ein Ass hat?

$$P(\text{mindestens ein Ass}) = 1 - P(\text{kein Ass}) = 1 - \frac{\binom{4}{0}\binom{48}{5}}{\binom{52}{5}} \approx 0,341$$

b) genau ein Ass hat?

$$P(\text{genau ein Ass}) = \frac{\binom{4}{1}\binom{48}{4}}{\binom{52}{5}} \approx 0,299$$

c) mindestens zwei Karten der gleichen Art ("Paar") hat?

Aufgabe 1: Ergebnisraum & Hypergeometrische Verteilung

Bei einem Kartenspiel erhält ein Spieler 5 Karten aus einem Deck von 52 Karten (bestehend aus 13 Arten mit je 4 Farben). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler

a) mindestens ein Ass hat?

$$P(\text{mindestens ein Ass}) = 1 - P(\text{kein Ass}) = 1 - \frac{\binom{4}{0}\binom{48}{5}}{\binom{52}{5}} \approx 0,341$$

b) genau ein Ass hat?

$$P(\text{genau ein Ass}) = \frac{\binom{4}{1}\binom{48}{4}}{\binom{52}{5}} \approx 0,299$$

c) mindestens zwei Karten der gleichen Art (“Paar”) hat?

$$\begin{aligned} P(\text{mindestens zwei gleiche Karten}) &= 1 - P(\text{alle Karten unterschiedlich}) \\ &= 1 - \frac{\text{Anzahl Möglichkeiten mit nur unterschiedlichen Karten}}{\text{Anzahl Möglichkeiten}} \\ &= 1 - \frac{\binom{13}{5} \cdot 4^5}{\binom{52}{5}} \approx 0,493 \end{aligned}$$

Kombinatorik

- Potenzmenge

$$\mathcal{P}(\Omega) = \{A : A \subseteq \Omega\} \qquad \text{(“Menge aller Teilmengen von } \Omega\text{”)}$$

Beispiel

$$\Omega = \{A, B, C\}$$

$$\mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset, \{A\}, \{B\}, \{C\}, \{A, B\}, \{A, C\}, \{B, C\}, \{A, B, C\}\}$$

Kombinatorik

- Potenzmenge

$$\mathcal{P}(\Omega) = \{A : A \subseteq \Omega\} \qquad (\text{“Menge aller Teilmengen von } \Omega\text{”})$$

Beispiel

$$\Omega = \{A, B, C\}$$
$$\mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset, \{A\}, \{B\}, \{C\}, \{A, B\}, \{A, C\}, \{B, C\}, \{A, B, C\}\}$$

- Variationen und Kombinationen

	Mit Zurücklegen	Ohne Zurücklegen
Mit Reihenfolge (*Variationen*)	$\lvert\widetilde{V}_N^{(K)}\rvert = N^K$	$\lvert V_N^{(K)}\rvert = \frac{N!}{(N-K)!}$
Ohne Reihenfolge (*Kombinationen*)	$\lvert\widetilde{C}_N^{(K)}\rvert = \binom{N+K-1}{K}$	$\lvert C_N^{(K)}\rvert = \binom{N}{K}$

Kombinatorik

- Potenzmenge

$$\mathcal{P}(\Omega) = \{A : A \subseteq \Omega\} \qquad \text{(“Menge aller Teilmengen von } \Omega\text{”)}$$

Beispiel

$$\Omega = \{A, B, C\}$$

$$\mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset, \{A\}, \{B\}, \{C\}, \{A, B\}, \{A, C\}, \{B, C\}, \{A, B, C\}\}$$

- Variationen und Kombinationen

	Mit Zurücklegen	Ohne Zurücklegen
Mit Reihenfolge (*Variationen*)	$\lvert\widetilde{V}_N^{(K)}\rvert = N^K$	$\lvert V_N^{(K)}\rvert = \frac{N!}{(N-K)!}$
Ohne Reihenfolge (*Kombinationen*)	$\lvert\widetilde{C}_N^{(K)}\rvert = \binom{N+K-1}{K}$	$\lvert C_N^{(K)}\rvert = \binom{N}{K}$

- Permutationen

$$\Pi_N = \{(a_1, \ldots, a_N) \in \Omega : a_i \neq a_j, i \neq j\}$$

Alle Elemente von Ω unterscheidbar: $\lvert\Pi_N\rvert = N!$

Jeweils $L_1, L_2, \ldots, L_M$ der Elemente sind gleich: $\lvert\Pi_N^{(L_1, L_2, \ldots, L_M)}\rvert = \frac{N!}{L_1! L_2! \cdots L_M!}$

Beispiel:

$$\Omega = A, B, C$$

$$\Pi_N = \{(A, B, C), (A, C, B), (B, A, C), (B, C, A), (C, A, B), (C, B, A)\}$$

Zusammenfassung

Potenzmenge

$$\mathcal{P}(\Omega) = \{A : A \subseteq \Omega\}$$

Permutationen

$$|\Pi_N| = N!$$

$$|\Pi_N^{(L_1,L_2,\dots,L_M)}| = \frac{N!}{L_1!L_2!\cdots L_M!}$$

Variationen & Kombinationen

	Mit Zurücklegen	Ohne Zurücklegen
Mit Reihenfolge (*Variationen*)	$\lvert\widetilde{V}_N^{(K)}\rvert = N^K$	$\lvert V_N^{(K)}\rvert = \frac{N!}{(N-K)!}$
Ohne Reihenfolge (*Kombinationen*)	$\lvert\widetilde{C}_N^{(K)}\rvert = \binom{N+K-1}{K}$	$\lvert C_N^{(K)}\rvert = \binom{N}{K}$

Aufgabe 2: Variationen & Permutationen

Aufgabe 2: Variationen & Permutationen Ein Burgerrestaurant bietet verschiedene Burger mit den Zutaten Salat (S), Käse (K), Tomate (T) und Patty (P) an. Diese werden zufällig für die Zubereitung eines Burgers ausgewählt.

a) Die Ergebnismenge sei $\Omega = \{S, K, T, P\}$. Wie lautet die Potenzmenge $P(\Omega)$?

b) Für einen normalen Burger werden 3 der 4 möglichen Zutaten ausgewählt und in einer bestimmten Reihenfolge auf das Burgerbrötchen gelegt. Wie viele verschiedene normale Burger gibt es?

c) Ein Burger "Spezial" besteht ebenfalls aus 3 Zutaten. Jedoch können Tomate und Salat doppelt vorkommen. Wie viele verschiedene Burger „Spezial" gibt es?

d) Der Burger „Jumbo" enthält die folgende Menge an Zutaten: $\{S, S, T, T, K, K, K, P, P, P\}$ die alle verwendet werden. Wie viele mögliche Belegungen des Burgers "Jumbo" gibt es?

Aufgabe 2: Variationen & Permutationen

Aufgabe 2: Variationen & Permutationen Ein Burgerrestaurant bietet verschiedene Burger mit den Zutaten Salat (S), Käse (K), Tomate (T) und Patty (P) an. Diese werden zufällig für die Zubereitung eines Burgers ausgewählt.

a) Die Ergebnismenge sei $\Omega = \{S, K, T, P\}$. Wie lautet die Potenzmenge $P(\Omega)$?

Aufgabe 2: Variationen & Permutationen

Aufgabe 2: Variationen & Permutationen Ein Burgerrestaurant bietet verschiedene Burger mit den Zutaten Salat (S), Käse (K), Tomate (T) und Patty (P) an. Diese werden zufällig für die Zubereitung eines Burgers ausgewählt.

a) Die Ergebnismenge sei $\Omega = \{S, K, T, P\}$. Wie lautet die Potenzmenge $P(\Omega)$?

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(\Omega) = \{&\emptyset, \{S\}, \{K\}, \{T\}, \{P\},\\ &\{S,K\}, \{S,T\}, \{S,P\}, \{K,T\}, \{K,P\}, \{T,P\},\\ &\{S,K,T\}, \{S,K,P\}, \{S,T,P\}, \{K,T,P\}, \{S,K,T,P\}\}\end{aligned}$$

Aufgabe 2: Variationen & Permutationen

Aufgabe 2: Variationen & Permutationen Ein Burgerrestaurant bietet verschiedene Burger mit den Zutaten Salat (S), Käse (K), Tomate (T) und Patty (P) an. Diese werden zufällig für die Zubereitung eines Burgers ausgewählt.

a) Die Ergebnismenge sei $\Omega = \{S, K, T, P\}$. Wie lautet die Potenzmenge $P(\Omega)$?

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(\Omega) = \{&\emptyset, \{S\}, \{K\}, \{T\}, \{P\},\\ &\{S, K\}, \{S, T\}, \{S, P\}, \{K, T\}, \{K, P\}, \{T, P\},\\ &\{S, K, T\}, \{S, K, P\}, \{S, T, P\}, \{K, T, P\}, \{S, K, T, P\}\}\end{aligned}$$

b) Für einen normalen Burger werden 3 der 4 möglichen Zutaten ausgewählt und in einer bestimmten Reihenfolge auf das Burgerbrötchen gelegt. Wie viele verschiedene normale Burger gibt es?

Aufgabe 2: Variationen & Permutationen

Aufgabe 2: Variationen & Permutationen Ein Burgerrestaurant bietet verschiedene Burger mit den Zutaten Salat (S), Käse (K), Tomate (T) und Patty (P) an. Diese werden zufällig für die Zubereitung eines Burgers ausgewählt.

a) Die Ergebnismenge sei $\Omega = \{S, K, T, P\}$. Wie lautet die Potenzmenge $P(\Omega)$?

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(\Omega) = \{&\emptyset, \{S\}, \{K\}, \{T\}, \{P\},\\ &\{S,K\}, \{S,T\}, \{S,P\}, \{K,T\}, \{K,P\}, \{T,P\},\\ &\{S,K,T\}, \{S,K,P\}, \{S,T,P\}, \{K,T,P\}, \{S,K,T,P\}\}\end{aligned}$$

b) Für einen normalen Burger werden 3 der 4 möglichen Zutaten ausgewählt und in einer bestimmten Reihenfolge auf das Burgerbrötchen gelegt. Wie viele verschiedene normale Burger gibt es?

$$|V_N^{(K)}| = \frac{4!}{1!} = 24$$

Aufgabe 2: Variationen & Permutationen

Aufgabe 2: Variationen & Permutationen Ein Burgerrestaurant bietet verschiedene Burger mit den Zutaten Salat (S), Käse (K), Tomate (T) und Patty (P) an. Diese werden zufällig für die Zubereitung eines Burgers ausgewählt.

c) Ein Burger “Spezial” besteht ebenfalls aus 3 Zutaten. Jedoch können Tomate und Salat doppelt vorkommen. Wie viele verschiedene Burger „Spezial“ gibt es?

Aufgabe 2: Variationen & Permutationen

Aufgabe 2: Variationen & Permutationen Ein Burgerrestaurant bietet verschiedene Burger mit den Zutaten Salat (S), Käse (K), Tomate (T) und Patty (P) an. Diese werden zufällig für die Zubereitung eines Burgers ausgewählt.

c) Ein Burger "Spezial" besteht ebenfalls aus 3 Zutaten. Jedoch können Tomate und Salat doppelt vorkommen. Wie viele verschiedene Burger „Spezial“ gibt es?

$$\begin{aligned} n_{\text{Burger}} &= n_{\text{Burger,alle Unterschiedlich}} + n_{\text{Burger},2\times\text{Salat}} + n_{\text{Burger},2\times\text{Tomate}} \\ &= 24 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 = 42 \end{aligned}$$

Aufgabe 2: Variationen & Permutationen

Aufgabe 2: Variationen & Permutationen Ein Burgerrestaurant bietet verschiedene Burger mit den Zutaten Salat (S), Käse (K), Tomate (T) und Patty (P) an. Diese werden zufällig für die Zubereitung eines Burgers ausgewählt.

c) Ein Burger "Spezial" besteht ebenfalls aus 3 Zutaten. Jedoch können Tomate und Salat doppelt vorkommen. Wie viele verschiedene Burger „Spezial" gibt es?

$$\begin{aligned} n_{\text{Burger}} &= n_{\text{Burger,alle Unterschiedlich}} + n_{\text{Burger,}2\times\text{Salat}} + n_{\text{Burger,}2\times\text{Tomate}} \\ &= 24 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 = 42 \end{aligned}$$

d) Der Burger „Jumbo" enthält die folgende Menge an Zutaten: $\{S, S, T, T, K, K, K, P, P, P\}$ die alle verwendet werden. Wie viele mögliche Belegungen des Burgers "Jumbo" gibt es?

Aufgabe 2: Variationen & Permutationen

Aufgabe 2: Variationen & Permutationen Ein Burgerrestaurant bietet verschiedene Burger mit den Zutaten Salat (S), Käse (K), Tomate (T) und Patty (P) an. Diese werden zufällig für die Zubereitung eines Burgers ausgewählt.

c) Ein Burger "Spezial" besteht ebenfalls aus 3 Zutaten. Jedoch können Tomate und Salat doppelt vorkommen. Wie viele verschiedene Burger „Spezial" gibt es?

$$\begin{aligned} n_{\text{Burger}} &= n_{\text{Burger,alle Unterschiedlich}} + n_{\text{Burger,}2\times\text{Salat}} + n_{\text{Burger,}2\times\text{Tomate}} \\ &= 24 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 = 42 \end{aligned}$$

d) Der Burger „Jumbo" enthält die folgende Menge an Zutaten: $\{S, S, T, T, K, K, K, P, P, P\}$ die alle verwendet werden. Wie viele mögliche Belegungen des Burgers "Jumbo" gibt es?

$$|\Pi_N^{L_1,L_2,L_3,L_4}| = \frac{10!}{2!2!3!3!} = 25200$$